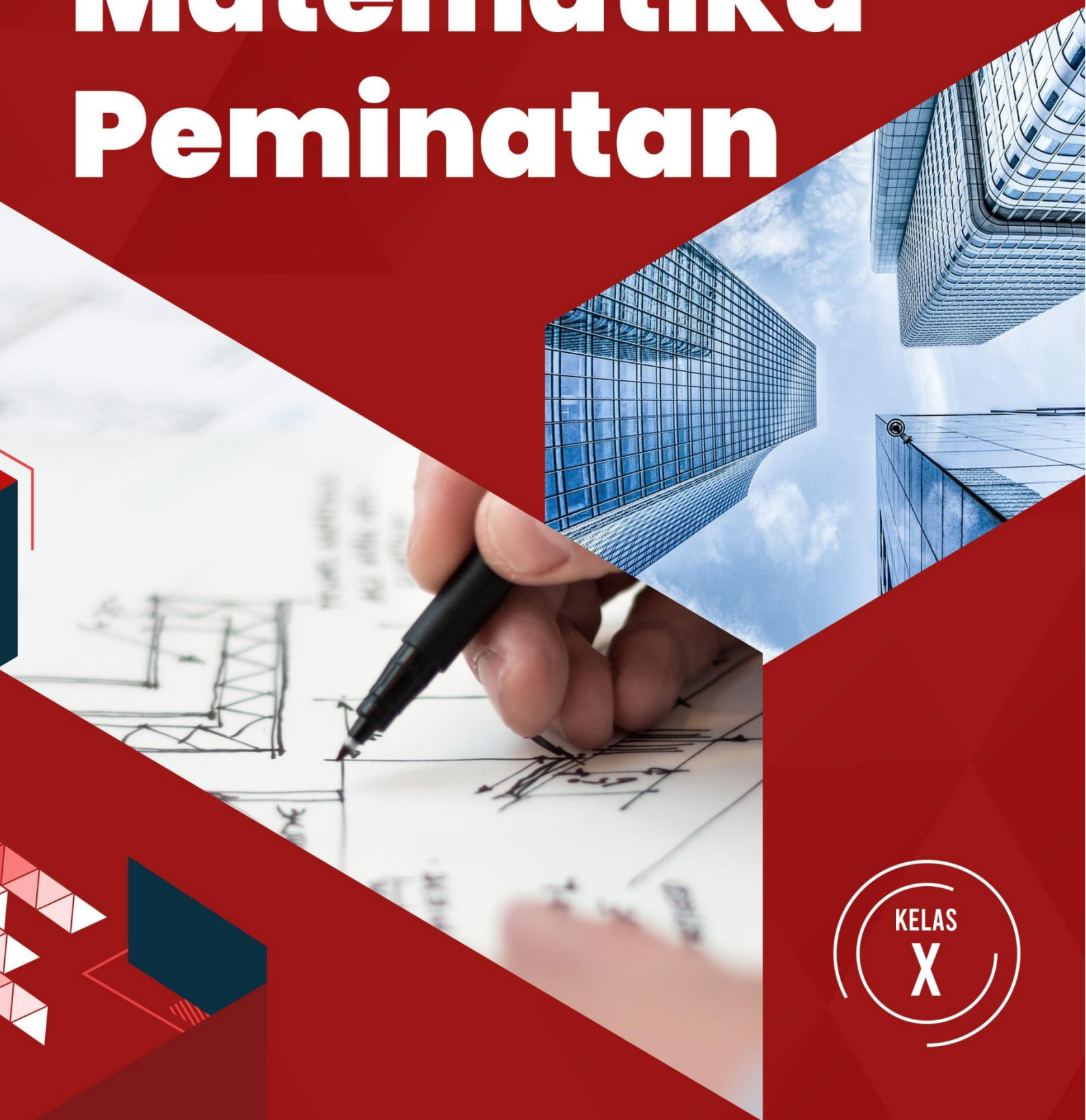
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Matematika Peminatan

VEKTOR

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS X

PENYUSUN
Entis Sutisna, S.Pd.

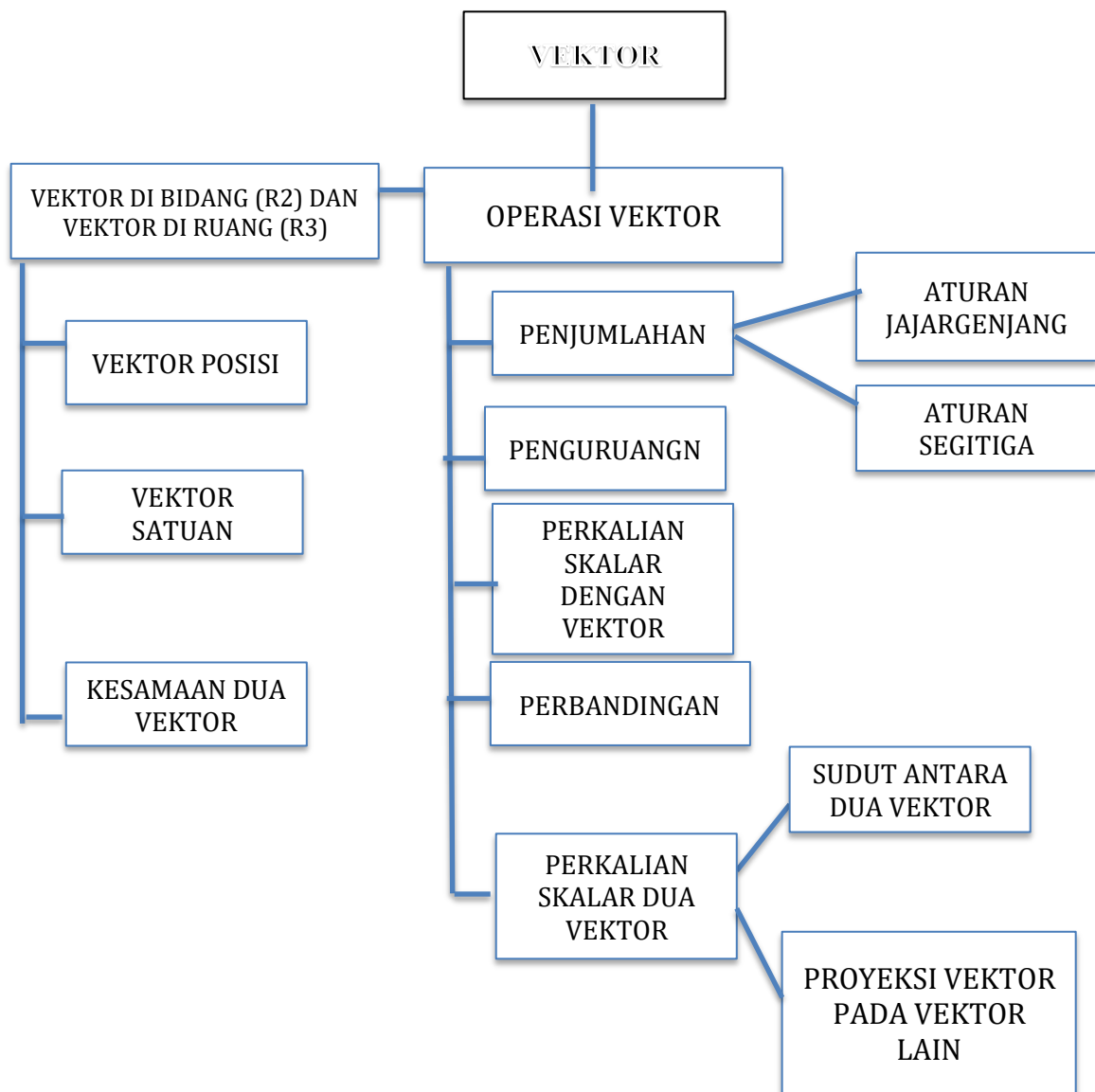
SMA Negeri 4 Tangerang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Besaran vektor	:	Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor dapat dinyatakan sebagai segmen garis berarah, di mana panjang segmen menyatakan besar vektor dan arah anak panah menyatakan arah vektor.
Vektor pada bidang koordinat Cartesius	:	Vektor pada bidang koordinat Cartesius mempunyai dua komponen, yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y). Jika diberikan komponen-komponen suatu vektor maka vektor tersebut dapat digambar dan dapat ditentukan besarnya.
Modulus vektor	:	Adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.
Vektor posisi pada R^2	:	Adalah vektor dengan pangkal di titik O(0,0). Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar (modulus) dan arah yang sama.
Vektor negatif	:	Vektor yang besarnya sama dengan $\vec{u}$ tetapi arahnya berlawanan dengan $\vec{u}$ dikatakan vektor negative $\vec{u}$ dan dilambangkan $-\vec{u}$.
Vektor nol	:	Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah. Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1.
Aturan segitiga	:	Yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua.
Aturan jajaran genjang	:	Yaitu dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$.
Modulus vektor pada bagun ruang	:	Yaitu besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.
Vektor posisi pada R^3	:	Adalah vektor yang menyatakan kedudukan setiap titik di ruang koordinat Cartesius. Vektor posisi berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik pada ruang koordinat.

PETA KONSEP

VEKTOR
VEKTOR DI BIDANG (R2) DAN VEKTOR DI RUANG (R3)
OPERASI VEKTOR
VEKTOR POSISI
VEKTOR SATUAN
KESAMAAN DUA VEKTOR
PENJUMLAHAN
ATURAN JAJARGENJANG
ATURAN SEGITIGA
PENGURUANGN
PERKALIAN SKALAR DENGAN VEKTOR
PERBANDINGAN
SUDUT ANTARA DUA VEKTOR
PERKALIAN SKALAR DUA VEKTOR
PROYEKSI VEKTOR PADA VEKTOR LAIN

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	30 jam pelajaran
Judul Modul	:	Vektor

B. Kompetensi Dasar

3.2 Menjelaskan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan Vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga.

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Vektor. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi Vektor di kelas X peminatan. Melalui modul ini Anda diajak untuk memahami konsep vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan Vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga.

Aplikasi vektor dalam kehidupan nyata banyak digunakan di bidang teknik sipil, vektor digunakan dalam rancang bangun dasar arsitektur untuk perhitungan panjang, sudut, dan letak; menentukan komponen- komponen dasar di dalam bangunan tersebut; mengetahui perhitungan pasti dari rangka bangunan, contoh : penempatan pilar pondasi; menentukan garis siku-siku dilapangan, garis siku-siku di lapangan banyak dilakukan dengan memanfaatkan dalil phytagoras; menentukan kekuatan gaya yang bekerja pada struktur bangunan di atas tanah, perhitungan arah vektor gaya dimaksudkan untuk mencegah terjadinya keruntuhan bangunan; menghitung momen balok dan dimensi balok; sebagai dasar penentuan perhitungan kemiringan atap; dan mengukur tinggi gedung dan memperkirakan tinggi pembangunan gedung dengan memperhitungkan sudut elevasi dan sudut pandang bangunan. Bidang lain pun konsep vektor banyak digunakan.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Anda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.

4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Anda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Anda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Anda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 4 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Pengertia dan Lingkup Vektor pada Bidang Datar

Kedua : Operasi Vektor pada Bidang (R^2)

Ketiga : Ruang Lingkup Vektor pada Bangun Ruang

Keempat : Operasi Vektor Pada Bangun Ruang

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Pengertian dan Lingkup Vektor pada Bidang Datar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Anda dapat mengetahui pengertian vektor dan ruang lingkup vektor yang meliputi:

1. Komponen-komponen dari vektor.
2. Menuliskan notasi-notasi vektor.
3. Menggambarkan vektor apabila diberikan komponen-komponennya.
4. Kesamaan dua vektor.
5. Vektor nol.
6. Vekktor posisi.
7. Vektor satuan.

B. Uraian Materi

Pengertian Vektor Pada Bidang Datar

Ketika Anda sedang melakukan perjalanan ke suatu tempat pasti Anda sering menemukan papan petunjuk arah seperti papan petunjuk arah berikut:

Gambar 1.1 Papan Petunjuk Arah.

Untuk sampai pada kota yang diinginkan pengguna jalan harus mengikuti arah dan menempuh jarak yang ditentukan. Misalnya untuk mencapai kota Bandar Lampung, Anda harus membelok ke arah kiri dan menempuh jarak sejauh 8 km dari lokasi papan petunjuk tersebut atau kalau Anda mau ke kota Palembang, Anda harus membelok ke kanan dan menempuh jarak sejauh 360 km dari papan petunjuk. Dengan demikian ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu arah dan jarak (besar) yang harus ditempuh.

Pernahkah Anda melihat lembing yang meluncur di udara saat dilempar oleh atlet lempar lembing? Atau anak panah yang terlepas dari busurnya saat seorang atlet memanah ke arah papan sasaran? Lembing atau anak panah tersebut meluncur dengan kecepatan dan arah tertentu sesuai dengan keinginan sang atlet. Hal yang sama ketika Anda melihat tentara terjun payung atau anak kecil main jungkitan di taman.

Gambar 1.2. Lempar Lembing

Gambar 1.3. Memanah

Sumber: www. https://darunnajah.com

Gambar 1.4 Terjun payung

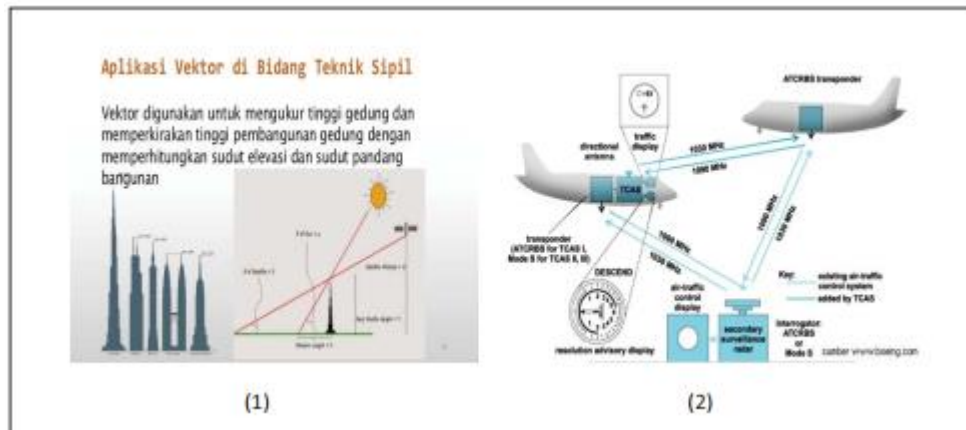
Gambar 1.5 Anak kecil main Jungkitan

Seluruh ilustrasi yang Anda baca di atas berkaitan dengan arah dan jarak. Tentang arah dan jarak sudah Anda pelajari waktu di SMP dalam pelajaran IPA Fisika. Banyak contoh besaran fisika yang memiliki arah dan besar seperti uraian di atas, antara lain: kecepatan, percepatan, gaya, dan sebagainya.

Besaran yang mempunyai arah dan besar biasanya dinyatakan dengan ruas garis berarah. Ruas garis berarah tersebut dinamakan ***vektor***. Konsep vektor pada IPA Fisika adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Besaran yang hanya memiliki besar saja disebut **skalar**, seperti berat, panjang, luas dan lain-lain. Sementara itu konsep vektor dalam metematika adalah ruas garis berarah yang panjangnya adalah jarak dari titik pangkal ke titik ujung dan arahnya adalah arah dari pangkal ke ujung atau perpanjangannya. Panjang ruas garis berarah menyatakan besar vektor, sedangkan arah vektor dinyatakan oleh kemiringan ruas garis dan anak panahnya.

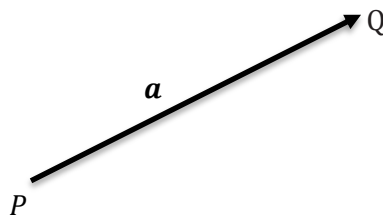
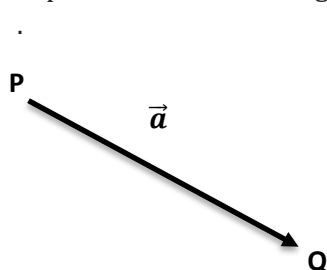
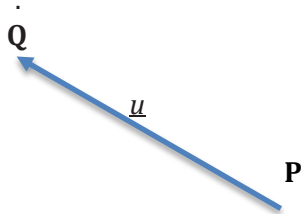
Dalam kehidupan sehari-hari vektor banyak digunakan dalam berbagai aktivitas dan berbagai bidang kehidupan. Vektor sangat bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam bidang teknik sipil, navigasi, militer dan lain-lain.

Gambar 1.6

Sumber: (1) *https://www.google.co.id/search?q=penerapan+vektor+dalam+teknik+sipil*
(2) *https://fisikakelompok7.blogspot.com*

Gambar 1.6.(1) Contoh pemanfaatn vektor dalam teknik sipil dan gambar 1.6.(2) dalam bidang navigasi.

Untuk lebih memahami masalah vektor, coba Anda lakukan aktivitas berikut:
1. Gambarlah sebuah ruas garis pada selembar kertas!
2. Berilah tanda panah pada ujung ruas garis tersebut ini!
3. Sebut titik pangkal ruas garis sebagai titik P dan titik ujungnya sebagai titik Q.
4. Ukurlah panjang ruas garis dengan menggunakan penggaris!
5. Diskusikan dengan temanmu!
6. Apa yang dapat disimpulkan dari aktivitas ini?

Ruas garis berarah yang Anda gambar pada kegiatan ini mewakili sebuah vektor. Panjang garis yang diukur menggunakan penggaris menunjukkan panjang vektor tersebut. Karena titik pangkal P dan titik ujung Q, maka vektor disebut sebagai vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ dan panjang vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ dilambangkan dengan $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$. Selain cara di atas, sebuah vektor dapat pula ditulis menggunakan:

- huruf kecil yang dicetak tebal.
  Seperti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, dan sebagainya. Misalnya, vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ di bawah ditulis sebagai vektor $\boldsymbol{a}$.

- huruf kecil yang di atas huruf itu dibubuhi tanda panah.
  Seperti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dan sebagainya. Misalnya vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat ditulis sebagai vektor $\vec{a}$.

- huruf kecil yang di bawah huruf itu dibubuhi tanda garis (garis bawah).
  Seperti $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ dan sebagainya. Misalnya vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat ditulis sebagai vektor $\underline{u}$.

Untuk selanjutnya dalam modul ini akan digunakan penulisan vektor dengan tanda panah di atas. Vektor yang Anda gambarkan di atas adalah contoh penyajian vektor secara **geometris**. Dalam matematika, vektor dapat disajikan secara geometris dan aljabar.

Komponen Vektor

Diantara Anda pasti ada yang pernah bermain *game* menggunakan *playstation,* seperti *game* sepak bola? Ketika bermain *game* sepakbola Anda akan menggerakkan pemain di layar televisi dengan menggerakkan tombol-tombol ke kanan, kiri, atas, bawah, serong kanan bawah, serong kiri atas dan sebagainya. Untuk memindahkan pemain ke arah kanan atas, Anda dapat melakukannya dengan menekan tombol kanan, diikuti dengan menekan tombol atas atau dengan menekan tombol atas, diikuti dengan menekan tombol kanan.

Cara lain yang lebih cepat adalah dengan menekan tombol kanan dan tombol atas secara bersamaan.

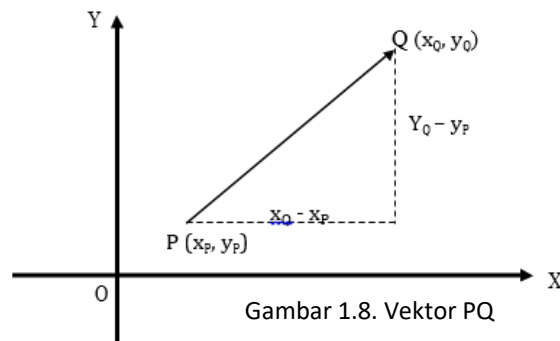
Gambar 1.7 Game Sepak Bola.

Sumber: https://www.yagaming.id/game-sepak-bola-offline-android/

Layar televisi dapat kita umpamakan bidang datar yang dapat digambarkan dengan bidang koordinat Cartesius *XOY*. Pemain-pemain sepakbola merupakan titik-titik yang dapat dipindahkan pada bidang *XOY*. Pemain sepakbola dapat berpindah letak ke segala arah dengan cara seperti uraian di atas. Pada prinsipnya setiap perpindahan letak pemain dapat ditentukan oleh dua komponen, yaitu gerakan ke kanan/kiri dan gerakan ke atas/bawah. Perpindahan letak pemain sepakbola itu merupakan suatu vektor.

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horisontal (gerakan ke kanan/kiri) dan komponen vertikal (gerakan ke atas/bawah).

Contoh 1:

Gambar 1.8. Vektor PQ

Komponen horisontal vektor $\overrightarrow{PQ}$ sebesar $x_Q - x_P$, sedang komponen vertikal vektor $\overrightarrow{PQ}$ sebesar $y_Q - y_P$.

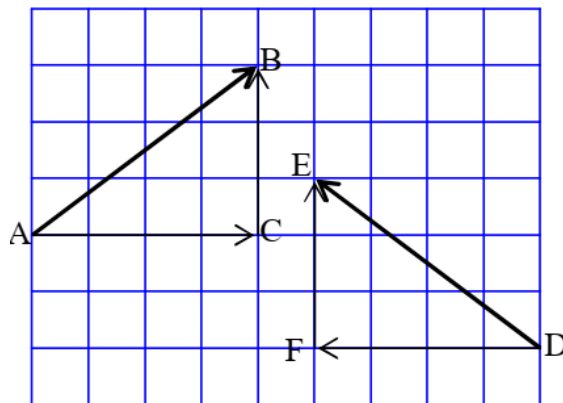
Dalam bentuk aljabar, vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks kolom:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Komponen\ Hosrisontal \\ Komponen\ Vertikal \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_p \end{pmatrix}$$

Dalam bentuk pasangan berurut: $\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_p)$

Atau dalam bentuk vektor basis : $\overrightarrow{PQ} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$

Contoh 2:

Coba Anda perhatikan gambar vektor berikut.

Gambar 1.9. Vektor AB dan DE

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} Komponen\ Horisontal \\ Komponen\ Vertikal \end{pmatrix}$$

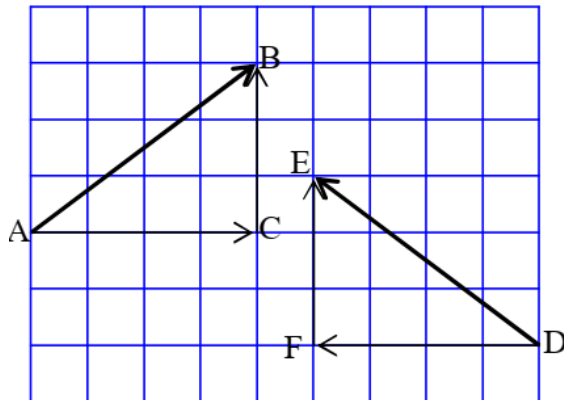
Komponen horisontal: $\begin{cases} \text{ke kanan tandanya positif} \\ \text{ke kiri tandanya negatif} \end{cases}$

Komponen vertikal: $\begin{cases} \text{ke atas tandanya positif} \\ \text{ke bawah tandanya negatif} \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} A \text{ ke } C \text{ terus} \\ C \text{ ke } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kanan 4} \\ \text{ke atas 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} D \text{ ke } F \text{ terus} \\ F \text{ ke } E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kiri 4} \\ \text{ke atas} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Panjang (Modulus) Vektor

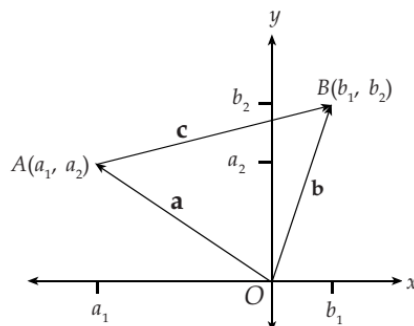
Coba Anda perhatikan kembali gambar berikut:

Vektor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{CB}$ membentuk segi tiga siku-siku. Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ bisa kita hitung dengan menggunakan rumus *Pythagoras*.

Panjang $\overrightarrow{AB}$ = $|\overrightarrow{AB}|$ = $\sqrt{(|\overrightarrow{AC}|)^2 + (|\overrightarrow{CB}|)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Panjang $\overrightarrow{DE}$ = $|\overrightarrow{DE}|$ = $\sqrt{(|\overrightarrow{DF}|)^2 + (|\overrightarrow{FE}|)^2} = \sqrt{(4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Secara umum jika vektor $\overrightarrow{AB} = \binom{a}{b}$, maka panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dinyatakan:

Panjang $\overrightarrow{AB}$ = $|\overrightarrow{AB}|$ = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Sekarang, perhatikan sebarang titik $A(a_1, a_2)$ dan titik $B(b_1, b_2)$ pada koordinat Cartesius berikut.

Gambar 1.10.

Pada gambar di atas, vektor $\vec{a}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $A(a_1, a_2)$. Oleh karena itu, vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ dapat Anda tuliskan dalam bentuk vektor kolom $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Adapun vektor $\vec{\boldsymbol{b}}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $B(b_1, b_2)$. Vektor $\vec{\boldsymbol{b}}$ dapat Anda tuliskan sebagai $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Dengan menggunakan rumus jarak, Anda dapat menentukan panjang vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ dan $\vec{\boldsymbol{b}}$, yaitu:

Panjang vektor $\vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_1^2 + \boldsymbol{a}_2^2}$

Panjang vektor $\vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{\boldsymbol{b}_1^2 + \boldsymbol{b}_2^2}$

Sekarang Anda perhatikan vektor $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ kita dapatkan dengan cara menarik garis dari titik A ke titik B. Seperti yang sudah dipelajari sebelumnya, vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk vektor kolom $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah:

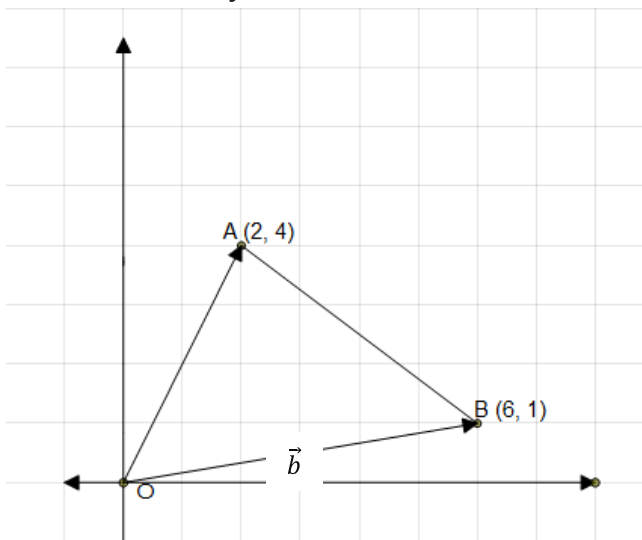
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Contoh 3:

Diketahui segitiga OAB dengan koordinat titik $O(0, 0)$, $A(2, 4)$ dan $B(6, 1)$.

Tentukan:

a. Vektor $\vec{a}$ yang mewakili ruas garis dari titik O ke titik A.
b. Vektor $\vec{b}$ yang mewakili ruas garis dari titik O ke titik B.
c. Vektor $\overrightarrow{AB}$ yang mewakili ruas garis dari titik A ke titik B.
d. Panjang vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\overrightarrow{AB}$.

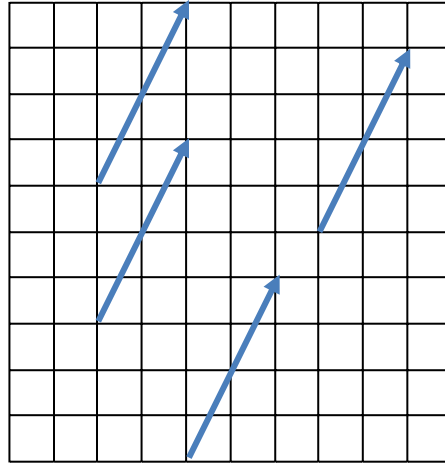
Alternatif Penyelesaian:

Gambar 1.11.

a. Dari gambar vektor $\vec{a}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $A(2, 4)$, jadi vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
b. Vektor $\vec{b}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $B(6, 1)$, jadi vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
c. Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
d. Panjang vektor $\vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Panjang vektor $\vec{b} = |\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$

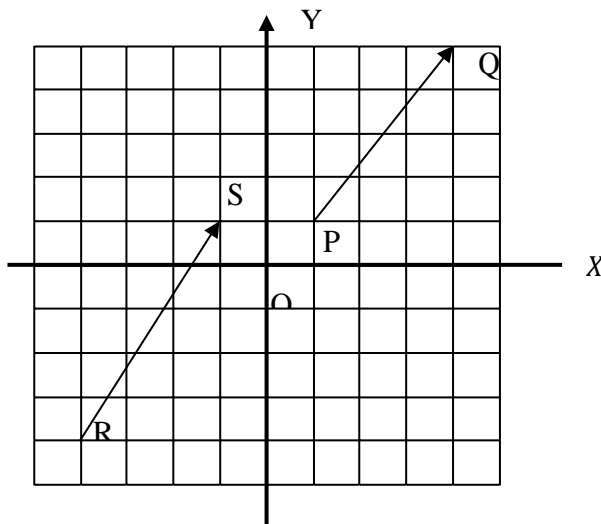
Panjang vektor $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Kesamaan Dua Vektor

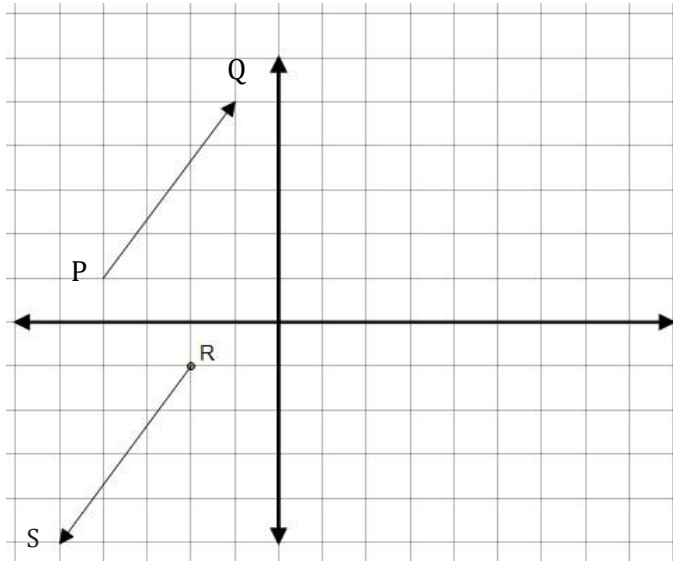
Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar berikut.

Gambar 1.12 Vektor Sama

Keempat vektor pada gambar di atas adalah sama karena mempunyai besar dan arah yang sama.

Contoh 4:

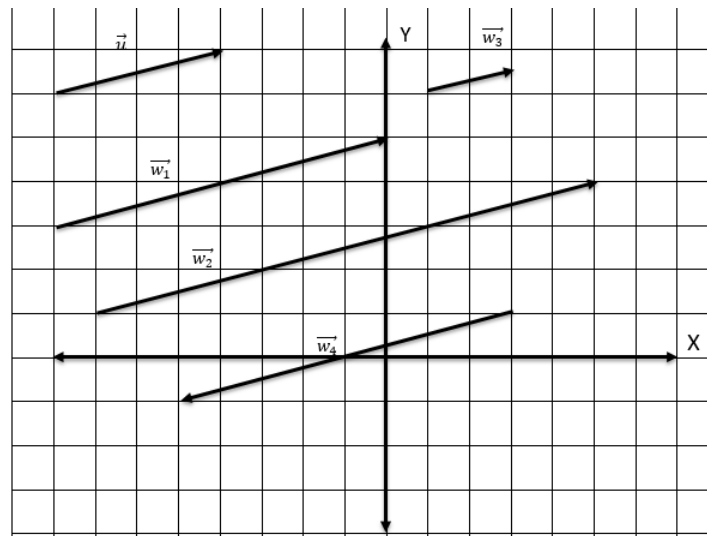
Diketahui vektor titik-titik $P(1, 1)$, $Q(4, 5)$, $R(-4 , -3)$, $S(-1, 1)$.

Gambar 1.13

Jadi, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ karena $\overrightarrow{PQ}$ searah $\overrightarrow{RS}$ dan $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RS}|$

Perhatikan gambar berikut.

Gambar 1.13

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan $\overrightarrow{RS}$ sama panjang dan arahnya berlawanan. Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan $\overrightarrow{RS}$ merupakan vektor berlawanan dan dapat ditulis : $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$ atau $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

Komponen vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan komponen vektor $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Coba Anda perhatikan gambar berikut.

Gambar 1.14

Vektor-vektor di atas merupakan vektor yang sejajar. Coba Anda perhatikan komponen vektornya.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.\vec{u}$

$\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\vec{u}$

$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u}$

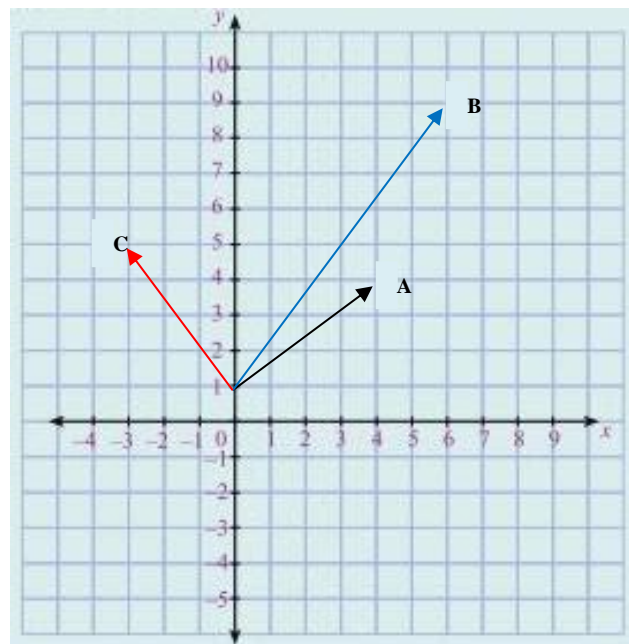
$\overrightarrow{w_4} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\vec{u}$

Dari komponen vektor tampak jelas bahwa vektor $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$, dan $\overrightarrow{w_4}$ merupakan kelipatan vektor $\vec{u}$. Vektor $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, dan $\overrightarrow{w_3}$, dapat dinyatakan dengan $k.\vec{u}$ dengan k skalar yang bernilai positif, sementara untuk $\overrightarrow{w_4}$ dengan k skalar betnilai negatif.

Vektor Nol

Suatu vektor disebut vektor nol apabila panjangnya nol. Arah dari vektor nol tak tentu, misalnya $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CC}}$, dan semacamnya disebut **vektor nol**. Vektor nol dilambangkan dengan $\vec{0}$.

Vektor Posisi

Anda perhatikan gambar berikut.

Gambar 1.15

Koordinat titik $A(4, 3)$, titik $B(6, 8)$ dan titik $C(-3, 4)$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ memiliki pangkal titik O dan ujung titik A, vektor $\overrightarrow{OB}$ memiliki pangkal titik O dan ujung titik B, vektor $\overrightarrow{OC}$ memiliki pangkal titik O dan ujung titik C.

Dari uraian sebelumnya Anda sudah mengetahui bahwa ruas garis berarah pada gambar mewakili vektor dengan komponen vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, vektor $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ dan vektor $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vektor vektor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ dan $\overrightarrow{OC}$ disebut vektor posisi.

Vektor posisi suatu titik dapat dilambangkan sesuai dengan **nama titik ujungnya** yang ditulis dengan huruf kecil. Vektor posisi titik A ialah $\vec{a}$, Vektor posisi titik B ialah $\vec{b}$, dan seterusnya. Vektor posisi titik A (a_1, a_2) = $\vec{a}$ = $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Pada bidang koordinat *Cartesius*, setiap titik P pada bidang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut vektor posisi dari titik P. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ dapat dinyatakan sebagai $\vec{p}$.

Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya satu satuan.

Vektor satuan dengan arah sumbu X, dinotasikan dengan $\vec{i}$, sehingga vektor $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Vektor satuan dengan arah sumbu Y, dinotasikan dengan $\vec{j}$, sehingga vektor $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Untuk setiap vektor $\vec{a}$ yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor $\vec{a}$, dilambangkan dengan $\hat{e}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor $\vec{a}$ dan panjangnya sama dengan satu satuan.

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dirumuskan dengan:

$$\hat{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

Contoh 5:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, tentukan vektor satuan yang searah vektor $\vec{a}$!

Alternatif penyelesaian:

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Panjang vektor $\vec{a} = \sqrt{-3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ = 5

Misalkan vektor satuan yang serah vektor $\vec{a}$ adalah ê.

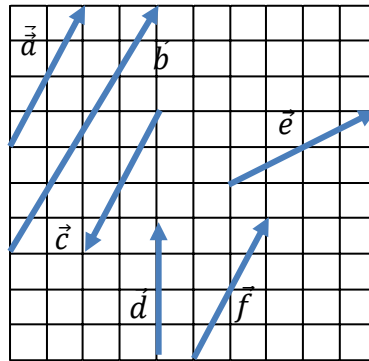
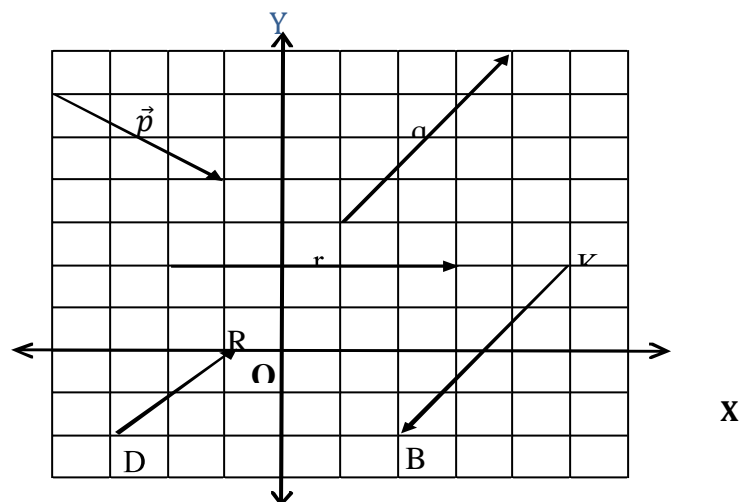
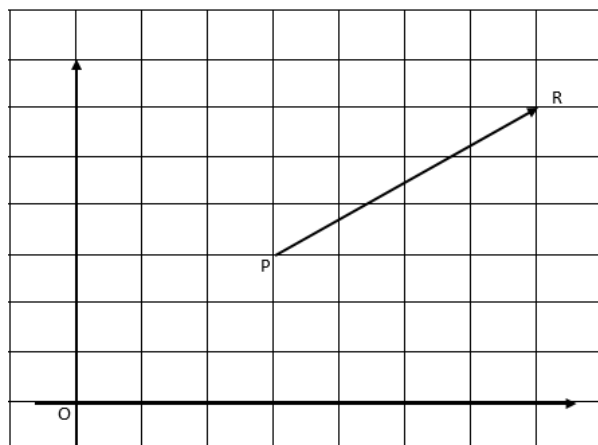
$$\hat{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2}}.\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}.\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

C. Rangkuman

Anda telah mempelajari konsep Vektor. Beberapa hal penting yang telah Anda pelajari kita rangkum disini:

- ❖ Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
- ❖ Vektor dapat dinyatakan sebagai segmen garis berarah, di mana panjang segmen menyatakan besar vektor dan arah anak panah menyatakan arah vektor.
- ❖ Vektor pada bidang koordinat Cartesius mempunyai dua komponen, yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y). Jika diberikan komponen-komponen suatu vektor maka vektor tersebut dapat digambar dan dapat ditentukanbesarnya.
- ❖ Panjang vektor (Modulus vektor) adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.
- ❖ Panjang (modulus) vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ dinyatakan $|\vec{u}|$=.$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- ❖ Vektor posisi adalah vektor dengan pangkal di titik O(0,0).
- ❖ Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar (modulus) dan arah yang sama.
- ❖ Vektor yang besarnya sama dengan u tetapi arahnya berlawanan dengan u dikatakan vektor negatif u dan dilambangkan –u.
- ❖ Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.
- ❖ Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1 satuan.

D. Latihan Soal

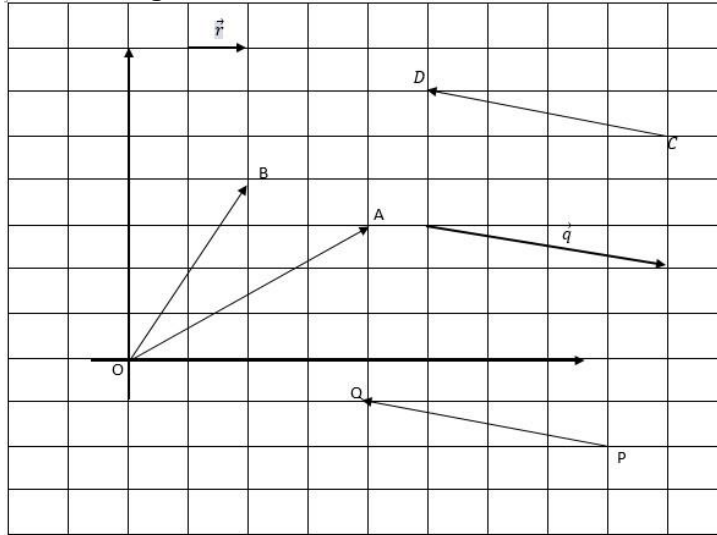
1. Perhatikan gambar vektor-vektor berikut:

   Manakah vektor yang
   a. besarnya sama tetapi arahnya berbeda
   b. arahnya sama tetapi besarnya berbeda
   c. besar dan arahnya sama
   d. besar dan arahnya berbeda
   e. searah
2. Tentukan komponen-komponen dari vektor-vektor berikut.

3. Tulislah notasi vektor-vektor di atas.
4. Perhatikan gambar berikut.

Gambarlah vektor yang

a. sama dengan vektor $\overrightarrow{PR}$

b. negatif dari vektor $\overrightarrow{PR}$

c. vektor satuan dari vektor PR

d. vektor posisi yang sama dengan PR

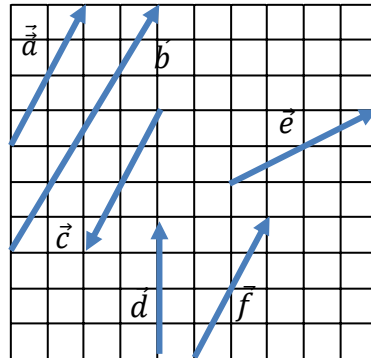
5. Perhatikan gambar berikut.

Dari gambar vektor manakah yang:

a. Vektor posisi
b. Sama dengan vektor $\overrightarrow{PQ}$
c. Negatif vektor $\overrightarrow{PQ}$
d. Vektor satuan
e. Vektor nol.

6. Diketahui koordinat titik A(3, 4) dan B(9, 12). Tentukan:

a. Vektor posisi dari titik A dan B
b. Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$
c. Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$
d. Vektor satuan dari vektor $\overrightarrow{AB}$

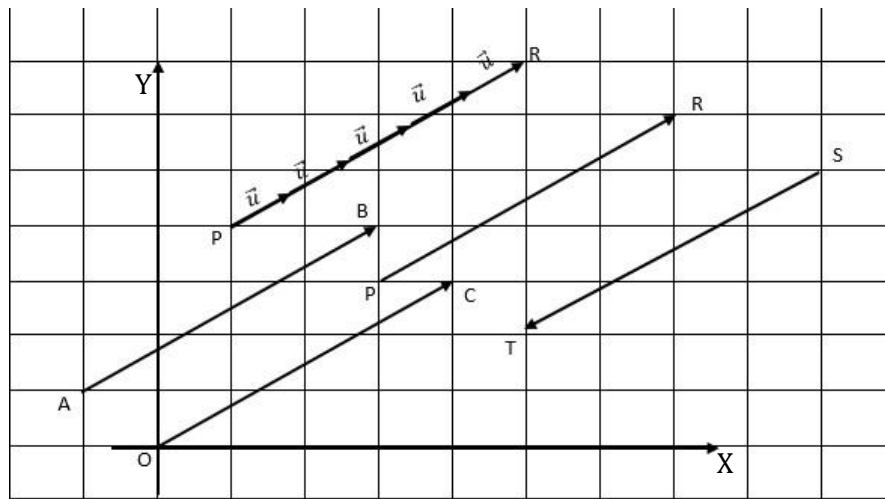
Pembahasan Soal Latihan Kegiatan Pembelajaran 1

1.

Vektor yang:

a. besarnya sama tetapi arahnya berbeda adalah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{c}$ **(skor 3)**
b. arahnya sama tetapi besarnya berbeda adalah vektor $\vec{b}$ **(skor 3)**
c. besar dan arahnya sama adalah vektor $\vec{f}$ **(skor 3)**
d. besar dan arahnya berbeda adalah vektor $\vec{d}$ dan $\vec{e}$ **(skor 3)**
e. searah adalah vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\vec{f}$ **(skor 3)**

2. a. komponen horizontal vektor $\vec{p}$ adalah 3 satuan **(skor 3)**
komponen vertikal vektor $\vec{p}$ adalah 2 satuan
b. komponen horizontal vektor $\vec{q}$ adalah 3 satuan **(skor 3)**
komponen vertikal vektor $\vec{q}$ adalah 4 satuan
c. komponen horizontal vektor $\vec{r}$ adalah 5 satuan **(skor 3)**
komponen vertikal vektor $\vec{r}$ adalah 0 satuan
d. komponen horizontal vektor $\overrightarrow{DR}$ adalah 2 satuan **(skor 3)**
komponen vertikal vektor $\overrightarrow{DR}$ adalah 2 satuan
e. komponen horizontal vektor $\overrightarrow{KB}$ adalah 3 satuan ke kiri **(skor 3)**
komponen vertikal vektor $\overrightarrow{KB}$ adalah 4 satuan ke bawah

3. vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} horizontal\ 3\ satuan \\ vertikal\ 2\ satuan \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **(skor 3)**
vektor $\vec{q} = \begin{pmatrix} horizontal\ 3\ satuan \\ vertikal\ 4\ satuan \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **(skor 3)**
vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} horizontal\ 5\ satuan \\ vertikal\ 0\ satuan \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(skor 3)**
vektor $\overrightarrow{DR} = \begin{pmatrix} horizontal\ 2\ satuan \\ vertikal\ 2\ satuan \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **(skor 3)**
vektor $\overrightarrow{KB} = \begin{pmatrix} horizontal - 3\ satuan \\ vertikal - 4\ satuan \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ **(skor 3)**

4. komponen horizontal vektor $\overrightarrow{PR}$ adalah 4 satuan komponen vertikal vektor $\overrightarrow{PR}$ adalah 3 satuan **(skor 20)**
Perhatikan gambar:
a. Vektor $\overrightarrow{AB}$ memiliki panjang dan arah yang sama dengan vektor $\overrightarrow{PR}$
b. Vektor $\overrightarrow{ST}$ memiliki panjang yang sama dan arah berlawanan dengan vektor $\overrightarrow{PR}$
c. Panjang vektor $\overrightarrow{PR} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Vektor $\vec{u}$ merupakan vektor satuan dari vektor $\overrightarrow{PR}$.
d. Vektor $\overrightarrow{OC}$ memiliki pangkal titik O (pangkal koordinat) dan panjang serta arah sama dengan vektor $\overrightarrow{PR}$, jadi vektor $\overrightarrow{OC}$ merupakan vektor posisi yang sama dengan vektor $\overrightarrow{PR}$.

5. Vektor yang merupakan :
   a. Vektor posisi adalah vektor $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$ **(skor 3)**
   b. Sama dengan vektor $\overrightarrow{PQ}$ adalah vektor $\overrightarrow{CD}$ **(skor 3)**
   c. Negatif vektor $\overrightarrow{PQ}$ adalah vektor $\vec{q}$ **(skor 3)**
   d. Vektor satuan adalah vektor $\vec{r}$ **(skor 3)**
   e. Vektor nol adalah vektor $\vec{O}$ **(skor 3)**

6. Diketahui koordinat titik $A(3, 4)$ dan $B(9,\ 12)$.:
   a. Vektor posisi dari titik A adalah vektor $\overrightarrow{OA}$ dan vektor posisi dari titik B adalah $\overrightarrow{OB}$. Vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ **(skor 4)**
   b. Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ **(skor 4)**
   c. Panjang vektor $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ **(skor 4)**
   d. Vektor satuan yang searah vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ **(skor 4)**
   e. $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{10} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ **(skor 4)**

Skor maksimum 100

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar Anda, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan$=\frac{\text{Jumlah skor}}{\text{Jumlah skor maksimum}} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda cukup atau kurang, maka Anda harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami pengertian Vektor.		
2.	Saya sudah dapat menentukan komponen-komponen dari vektor.		
3.	Saya sudah dapat menuliskan notasi-notasi vektor.		
4.	Saya sudah dapat menggambarkan vektor apabila diberikan komponen-komponennya.		
5	Saya sudah bisa menentukan kesamaan dua vektor,		
6	Saya sudah memahami vektor nol,		
7	Saya sudah dapat memahami vektor posisi,		
8	Saya sudah dapat memahami vektor satuan,		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Operasi Vektor pada Bidang (R^2)

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menentukan operasi vektor pada bidang, diantaranya hasil kali suatu vektor dengan skalar, hasil penjumlahan vektor-vektor, dan selisih dua vektor.

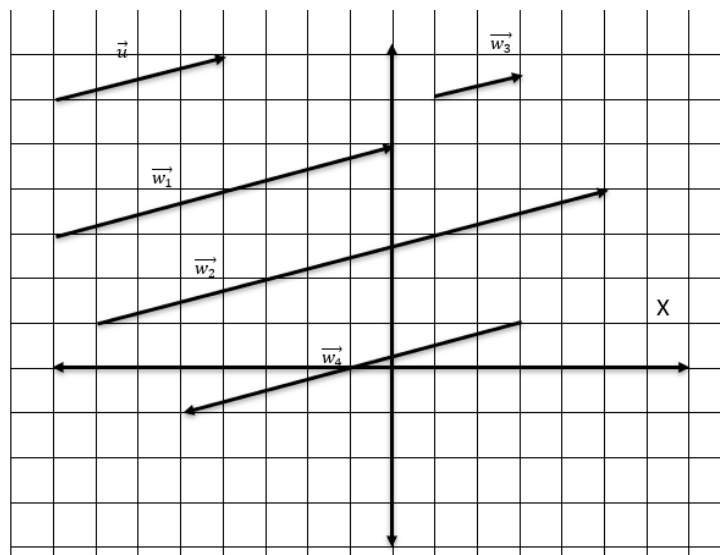
B. Uraian Materi

Menentukan Hasil Kali suatu Vektor dengan Skalar

Pada kegiatan pembelajaran 1 Anda telah mengenal besaran vektor, yaitu besaran yang memiliki besar (panjang) dan arah. Selain itu, ada besaran lain yang hanya memiliki besar, misalnya: jarak, waktu, massa, dan sebagainya. Besaran yang hanya memiliki besar disebut ***besaran skalar***. Adapun bilangan yang kita gunakan untuk mengukur besaran skalar disebut ***skalar.***

Vektor dapat dioperasikan dengan skalar. Karena skalar hanya mempunyai besar maka perkalian vektor dengan skalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja, sedangkan arahnya tetap.

Hasil kali vektor $\vec{a}$ dengan skalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\vec{a}$ dengan skalar k akan menghasilkan vektor $k.\vec{a}$ yang besarnya k kali besar $\vec{a}$ dan arahnya sama dengan $\vec{a}$ bila k positif, dan berlawanan arah $\vec{a}$ bila k negatif.

Coba Anda perhatikan contoh berikut.

Gambar 2.1

Dari gambar terlihat bahwa vektor $\overrightarrow{w_1}$ searah dengan vektor $\vec{u}$ dan panjangnya 2 kali vektor $\vec{u}$. Vektor $\overrightarrow{w_1}$= 2$\vec{u}$. Begitupula dengan vektor $\overrightarrow{w_2}$ dan $\overrightarrow{w_3}$. Sementara untuk vektor $\overrightarrow{w_4}$ arahnya berlawanan dengan arah vektor $\vec{u}$ dan panjangnya 2 kali vektor $\vec{u}$ sehingga vektor $\overrightarrow{w_4}$= -2$\vec{u}$.

Dalam bentuk komponen vektor bisa Anda lihat lebih jelas.

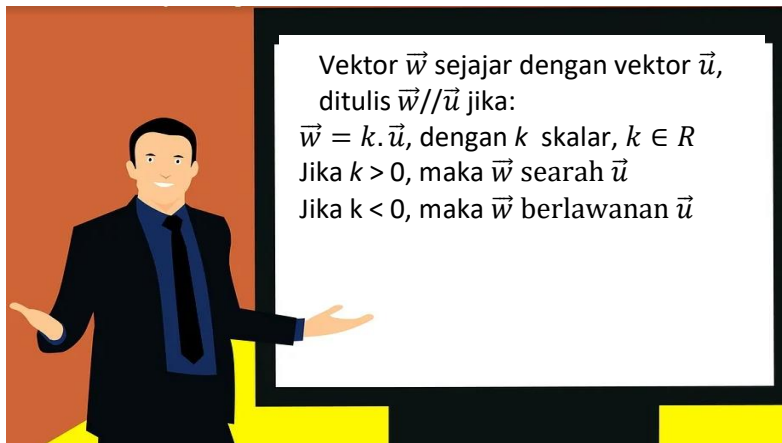
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_1} = 2.\vec{u} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_2} = 3.\vec{u} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_3} = \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_4} = -2\vec{u} = -2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Uraian di atas memperlihatkan bahwa vektor-vektor yang arahnya sama dengan vektor $\vec{u}$ yaitu $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ dan $\overrightarrow{w_3}$ dapat ditulis dalam bentuk $\overrightarrow{w_i} = k.\vec{u}$ dengan k skalar yang bernilai positif. Sementara itu vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{u}$ seperti $\overrightarrow{w_4}$, dapat ditulis dalam bentuk $\overrightarrow{w_i} = k.\vec{u}$ dengan k skalar yang bernilai negatif. Vektor-vektor yang arahnya sama atau berlawanan dengan vektor $\vec{u}$ disebut vektor-vektor yang sejajar dengan vektor $\vec{u}$. Sehingga:

Contoh 1:

Buktikan bahwa vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sejajar dengan vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Alternatif Penyelesaian:

Dua buah vektor akan sejajar jika memiliki arah yang sama atau arah berlawanan dan besarnya bisa berbeda. Dua vektor yang sejajar dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar dengan vektor.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 3.1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{u}$

Vektor $\vec{v}$ bisa dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar dengan vektor $\vec{u}$, yaitu $\vec{v} = 3\vec{u}$ atau vektor $\vec{u}$ dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar dengan vektor $\vec{v}$, yaitu $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$. Ini berarti vektor $\vec{u}$ searah dengan vektor $\vec{v}$ dan panjangnya $\frac{1}{3}\vec{v}$ atau vektor $\vec{v}$ searah dengan vektor $\vec{u}$ dan panjangnya 3 kali vektor $\vec{u}$. Jadi vektor $\vec{u}$ sejajar dengan vektor $\vec{v}$.

Contoh 2:

Tentukan apakah titik-titik $P(1, –2)$, $Q(2, 1)$, dan $R(4, 7)$ kolinear (segaris).

Alternatif Penyelesaian:

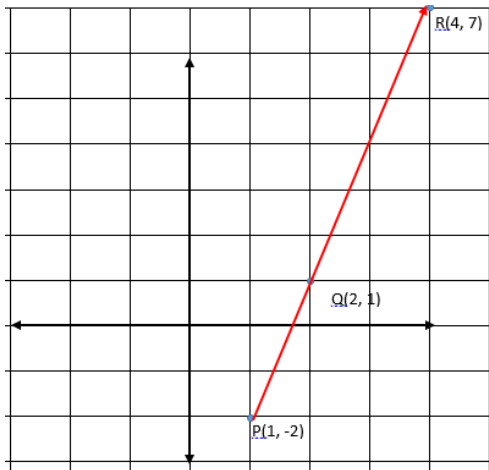
Titik P, Q dan R dikatakan kolinear (segaris) jika titik P, Q dan R terletak pada garis yang sama. Titik P, Q dan R akan terletak pada garis yang sama jika dan hanya jika

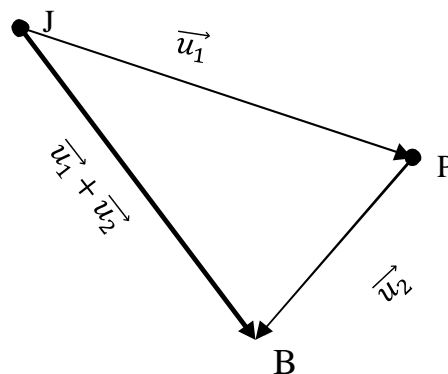
vektor-vektor yang mewakili ruas garis berarah dari titik-titik P, Q dan R memiliki pangkal yang sama dan sejajar.

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$ memiliki titik pangkal yang sama.

Komponen vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Komponen vektor $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 3.\overrightarrow{PQ}$

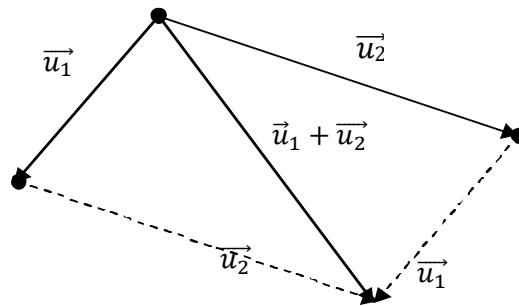
Karena $\overrightarrow{PR} = 3.\overrightarrow{PQ}$ berarti vektor $\overrightarrow{PQ}$ sejajar vektor $\overrightarrow{PR}$ dan sama-sama berpangkal di titik P. Jadi, dapat disimpulkan bahwa titik P, Q dan R merupakan titik-titik yang kolinear (segaris) seperti tampak pada gambar di bawah.

Penjumlahan Vektor

Anita dan Alya merencanakan dari Jakarta ke Bandung. Jika naik kereta api mereka akan melalui Purwakarta dahulu, kemudian ke Bandung. Tetapi jika naik pesawat, dia dapat terbang langsung dari Jakarta ke Bandung. Anita dan Alya menggambarkan rute perjalanannya dalam bentuk vektor sebagai berikut, dengan J mewakili Jakarta, P mewakili Purwakarta dan B mewakili Bandung

Gambar 2.2 Vektor Rute Jakarta -Bandung

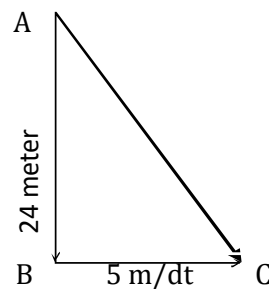
Dari gambar di atas, rute Jakarta-Purwakarta diwakili oleh vektor $\overrightarrow{JP} = \overrightarrow{u_1}$ dan dilanjutkan dengan rute Purwakarta-Bandung yang diwakili oleh vektor $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{u_2}$. Dari gambar yang dibuat Anita dan Alya, rute perjalanan naik kereta dari Jakarta – Purwakarta – Bandung sama hasilnya dengan rute perjalanan naik pesawat Jakarta – Bandung.

$$\overrightarrow{JP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{JB}$$

Masalah di atas merupakan masalah penjumlahan dua vektor atau resultan dari dua vektor. Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara seperti di atas, yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua. Cara ini disebut *aturan segitiga*.

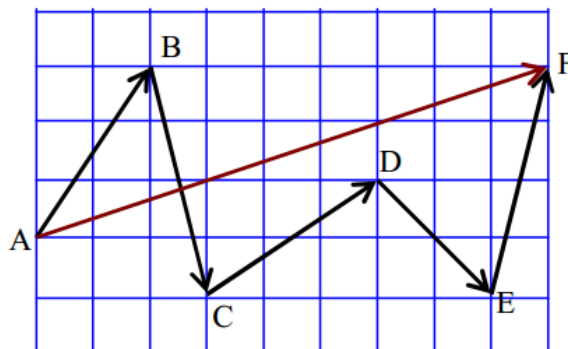
Selain itu dapat juga dilakukan dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Jumlah kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Cara ini disebut *aturan jajargenjang*. Perhatikan gambar berikut.

Gambar 2.3 Aturan Jajargenjang

Contoh 3 :

Sebuah perahu akan digunakan untuk menyeberangi sungai yang lebarnya 24 meter. Sungai itu mempunyai kecepatan arus 5 meter/detik. Arah perjalanan perahu tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 2.4

$\overrightarrow{AB}$ menyatakan arah dan jarak yang ingin ditempuh perahu,
$\overrightarrow{BC}$ menyatakan kecepatan arus
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ menyatakan arah dan jarak perjalanan perahu.

Contoh 4:

Perhatikan gambar berikut:

Gambar 2.5

Dari Gambar 2.5 diperoleh:

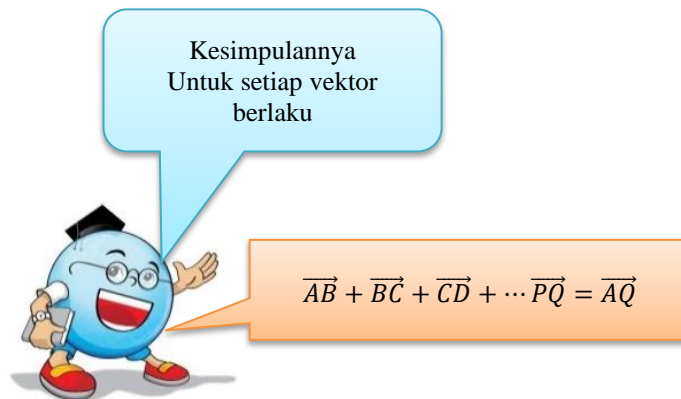
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$

Kalau kita jumlahkan maka:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} = \overrightarrow{AF}$$

Jadi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$

Kesimpulannya
Untuk setiap vektor
berlaku

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \cdots \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}$$

Contoh 5:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, tentukan vektor $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

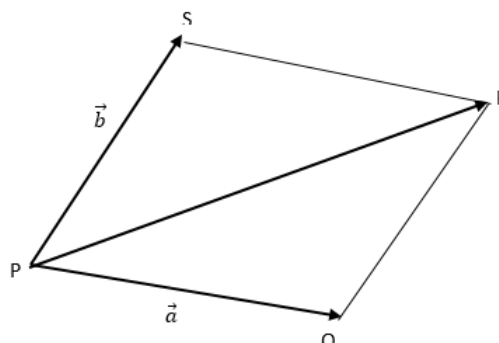
Alternatif penyelesaian:

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$$

Jadi: $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$

Sifat-sifat Penjumlahan Vektor

1) Komutatif

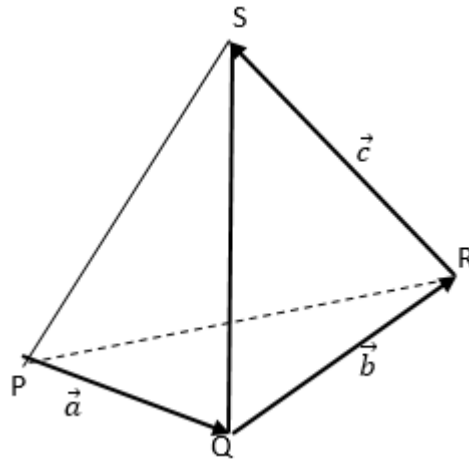
   Perhatikan gambar berikut:

Gambar 2.6 Penjumlahan vektor secara komutatif.

PQRS merupakan jajargenjang.

Misalkan: $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} \rightarrow \overrightarrow{SR} = \vec{a}$

$\overrightarrow{PS} = \vec{b} \rightarrow \overrightarrow{QR} = \vec{b}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \vec{b} + \vec{a}$
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutatif)
Jadi, penjumlahan pada vektor berlaku sifat komutatif.

2) Sifat Asosiatif
Perhatikan gambar berikut:

Gambar 2.7 Penjumlahan Vektor secara Asosiatif

$SPQR$ adalah suatu limas segitiga

$\overrightarrow{PQ} = \vec{a}, \overrightarrow{QR} = \vec{b}$, dan $\overrightarrow{RS} = \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

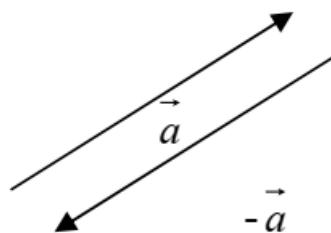
Jadi: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Berarti penjumlahan pada vektor bersifat Asosiatif.

3) Mempunyai elemen identitas, yaitu vektor $\vec{O}$ (*vektor nol*) sebab untuk semua vektor $\vec{a}$ berlaku $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$

4) Invers dari suatu vektor

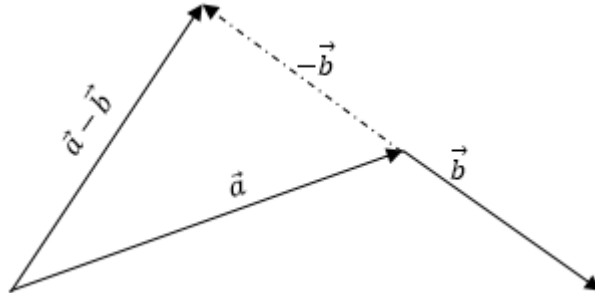
Lawan atau invers jumlah atau negatif dari suatu vektor $\vec{a}$ adalah suatu vektor yang apabila dijumlahkan dengan vektor $\vec{a}$ menghasilkan vektor nol. Lawan dari vektor $\vec{a}$ ditulis $-\vec{a}$. Apabila digambarkan dengan ruas garis berarah, sebuah vektor lawan dari vektor $\vec{a}$ adalah vektor yang panjangnya sama dengan vektor $\vec{a}$, tetapi arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{a}$. Jadi, setiap vektor $\vec{a}$ mempunyai invers jumlah (lawan).

Sebab: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$

Gambar 2.8 Invers dari suatu Vektor

Selisih Dua Vektor

Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Anda bisa menghitung selisih dua vektor dengan cara menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Perhatikan gambar berikut:

Gambar 2.9 Selisih Dua Vektor

Contoh 6:

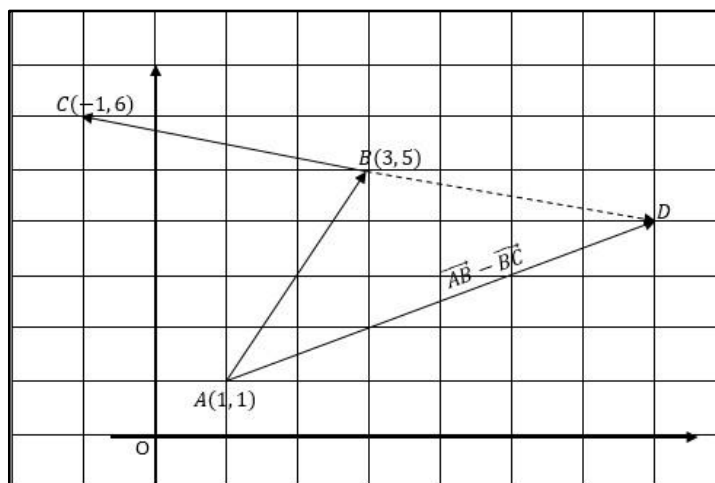
Diketahui koordinat titik $A(1, 1)$, $B(3, 5)$ dan C(-1, 6). Tentukan vektor $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$!

Alternatif penyelesaian:

Komponen vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Komponen vektor $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

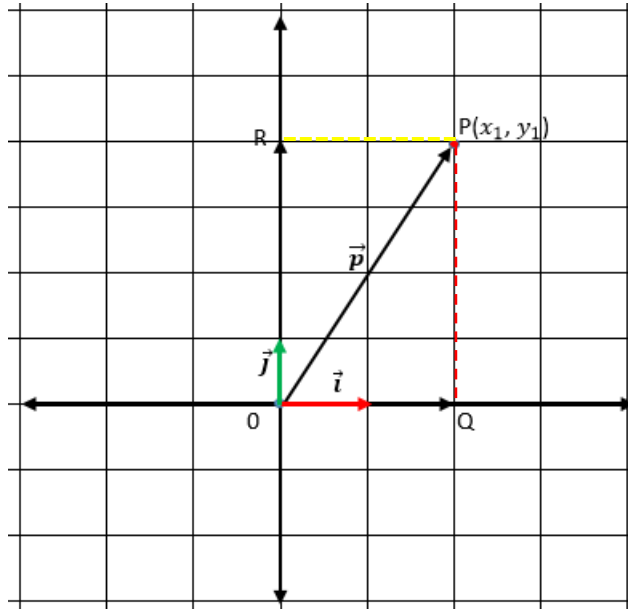
vektor $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Silahkan Anda perhatikan gambar berikut.

Gambar 2.10 Selisih Dua Vektor pada Kordinat Kartesius

Setelah Anda mempelajari konsep aturan rantai dalam menyelesaikan masalah Vektor, silahkan kembangkan pemahaman Anda dengan mengerjakan latihan dan evaluasi. Jika hasilnya belum memuaskan silahkan Anda ulang kembali pembelajarannya dari awal.

Vektor Basis di R^2

Setelah Anda mempelajari Perkalian skalar dengan vektor, penjumlahan dan selisih dua vektor, pembahasan kita kembangkan untuk memahami vektor basis.

Coba Anda perhatikan gambar berikut:

Gambar 2.11 Vektor Basis

Titik P(x_1, y_1) merupakan titik ujung vektor posisi yang pangkalnya pusat koordinat, yaitu vektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$. Dari gambar tampak bahwa: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$ dengan

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{RP} = x_1\vec{\imath}$ dan $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR} = y_1\vec{\jmath}$

Sehingga dapat dituliskan: $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$

Bentuk vektor ini disebut vektor basis dalam $\vec{\imath}$ dan $\vec{\jmath}$

Jadi setiap vektor di R^2 dapat disajikan dalam bentuk vektor basis

$$\vec{p} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$$

Contoh 7:

Diketahui segitiga OAB dengan titik sudut: O(0, 0), A(3, 1) dan B(6, 5).

$\vec{a}$ merupakan vektor posisi dari titik A dan $\vec{b}$ vektor posisi dari titik B.

Nyatakan vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\overrightarrow{AB}$ dalam bentuk vektor basis.

Alternatif penyelesaian:

$\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath}$

$\vec{b} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} = 6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}) - (3\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

C. Rangkuman

- Hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\vec{u}$ dan arah sama dengan $\vec{u}$.

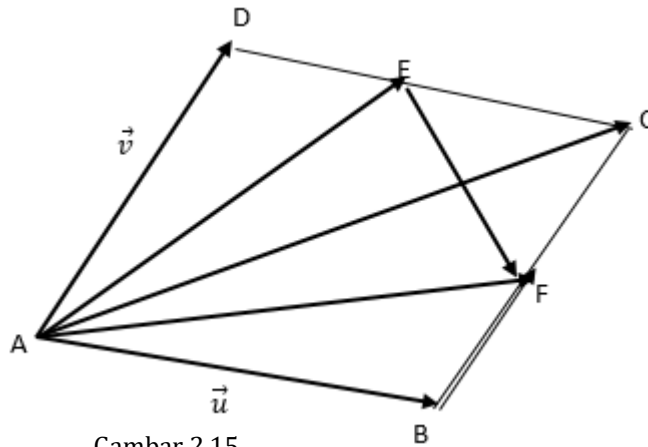
- Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara
  - *aturan segitiga*, yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua.
  - *aturan jajargenjang*, yaitu dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$
- Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Setiap vektor di R^2 dapat disajikan dalam bentuk vektor basis $\vec{p} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

D. Latihan Soal

Kerjakan dengan hati-hati dan teliti.

1. $ABCD$ adalah jajargenjang dengan $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, titik E dan F masing-masing titik tengah $\overrightarrow{DC}$ dan $\overrightarrow{BC}$. Nyatakan vektor-vektor berikut dalam $\vec{u}$ dan $\vec{v}$
   a. $\overrightarrow{AE}$
   b. $\overrightarrow{EF}$
   c. $\overrightarrow{AF}$
2. Diketahui $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, dan $C(10, 4)$ tunjukkan titik A, B, dan C segaris (*kolinear*) dan carilah $AB : BC$
3. Diketahui titik-titik A(-2, 5) dan B(2, -1). Jika $\vec{a}$ merupakan vektor posisi dari titik A dan $\vec{b}$ merupakan vektor posisi dari titik B, tentukan:
   a. $2\vec{a} - \vec{b}$
   b. $|\vec{a} + 2\vec{b}|$
4. Diketahui $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ dan $\vec{b} = 2\vec{i} + 13\vec{j}$ dan $\vec{c} = -2\vec{i} - 8\vec{j}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a} + \vec{b}$ dan $|\vec{a} + \vec{b}|$
   b. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ dan $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$
5. Diketahui titik O titik pangkal, dan titik-titik A, B dan C dengan vektor posisi $\overrightarrow{OA} = 9\vec{i} - 10\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ dan $\overrightarrow{OC} = m\vec{i} - 2\vec{j}$.
   a. Tentukan vektor satuan yang searah $\overrightarrow{AB}$
   b. Tentukan nilai m agar A, B dan C segaris

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 2

1. Perhatikan gambar berikut: **(skor maksimum 20)**

Gambar 2.15

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{u}$
$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{v}$

a. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$
b. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$
c. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

2. $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, dan $C(10, 4)$ **(skor maksimum 20)**
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 2.1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 3.1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{AB}$
Karena $\overrightarrow{AB}$ searah dengan$\overrightarrow{AC}$ dan panjang $\overrightarrow{AC} = 3.\overrightarrow{AB}$, maka titik A, B dan C segaris.
$\overrightarrow{BC} = 2.\overrightarrow{AB} \leftrightarrow \overrightarrow{BC} : \overrightarrow{AB} = 2 : 1$

3. Diketahui A(-2, 5) dan B(2, -1), maka vektor posisinya adalah
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(skor maksimum 20)**
Dicari:
a. $2\vec{a} - \vec{b} = 2.\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$
b. $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

4. Diketahui $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ dan $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 13\vec{\jmath}$ dan $\vec{c} = -2\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}$. Dalam bentuk vektor kolom: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ **(skor maksimum 20)**
Dicari:
a. $\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + (2\vec{\imath} + 13\vec{\jmath}) = 5\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}$
Dinyatakan dalam vektor kolom : $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$
$|\overrightarrow{a + b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

b. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

5. Diketahui: vektor posisi $\overrightarrow{OA}$ = $9\vec{\imath}$ - $10\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB}$= $4\vec{\imath}$ + $2\vec{\jmath}$ dan $\overrightarrow{OC}$ = $m\vec{\imath}$ - $2\vec{\jmath}$. Dalam bentuk vektor kolom $\overrightarrow{OA}$ = $\begin{pmatrix}9\\-10\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}$= $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{OC}$ = $\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}$

Dicari: **(skor maksimum 20)**

a. Vektor satuan searah $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}=-5\vec{\imath}+12\vec{\jmath}$

Vektor satuan searah $\overrightarrow{AB} = \ \vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{-5\vec{\imath}+12\vec{\jmath}}{13}=\frac{1}{13}(-5\vec{\imath}+12\vec{\jmath})$

b. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m-4\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+5\\-14\end{pmatrix}$

A, B dan C segaris

$\overrightarrow{AB}=n.\overrightarrow{BC}$

$\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}=n.\begin{pmatrix}m-4\\-4\end{pmatrix}$

$-3\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-4\end{pmatrix}=n.\begin{pmatrix}m-4\\-4\end{pmatrix}$

Dari persamaan diaas didapat n = -3.

$\frac{5}{3}=m-4 \ \leftrightarrow m=4+\frac{5}{3}=\frac{17}{3}$

Titik A, B dan C akan segaris jika nilai m = $\frac{17}{3}$

Skor maksimal 100.

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar Anda, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda cukup atau kurang, maka Anda harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami perkalian skalar dengan vektor.		
2.	Saya sudah dapat menentukan penjumlahan dua vektor.		
3.	Saya sudah dapat menentukan selisih vektor.		
4.	Saya sudah dapat memahami sifat operasi vektor		
5	Saya sudah bisa menentukan vektor basis pada R^2		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
Ruang Lingkup Vektor pada Bangun Ruang

A. Tujuan Pembelajaran

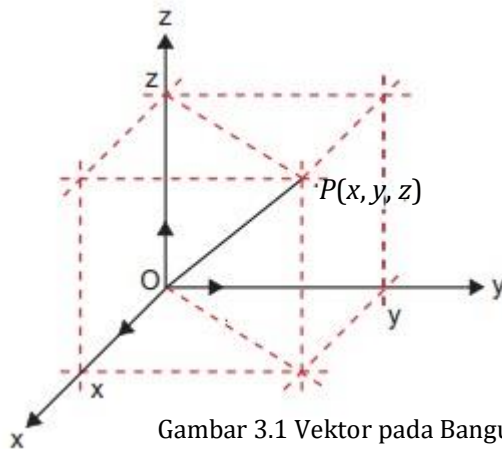
Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Anda dapat:

1. Menghitung modulus vektor bila diberikan suatu vektor pada bangun ruang.
2. Menentukan vektor posisi suatu vektor pada bangun ruang.
3. Menyatakan bahwa dua vektor pada bangun ruang sama.
4. Menentukan negatif dari suatu vektor pada bangun ruang.
5. Menyatakan pengertian vektor nol pada bangun ruang.
6. Menentukan vektor satuan pada bangun ruang.

B. Uraian Materi

Setelah pada pembelajaran 1 dan 2 Anda mempelajari vektor pada bidang (R^2), pada pembelajaran 3 kita kembangkankan pembahasan kita mengenai vektor pada bangun ruang (R^3).

Vektor pada bangun ruang (dimensi tiga) adalah vektor yang memiliki 3 buah sumbu yaitu X, Y dan Z yang saling tegak lurus dan perpotongan ketiga sumbu sebagai pangkal perhitungan vektor $\vec{p}$ pada bangun ruang dapat dituliskan dalam bentuk :

1. Koordinat Cartesius $P = (x, y, z)$

Gambar 3.1 Vektor pada Bangun Ruang

2. Vektor kolom $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ atau vektor baris $\vec{p} = (x, y, z)$
3. Kombinasi linear vektor satuan (vektor basis) $\vec{p} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

   dengan $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\vec{i}$ = vektor satuan dalam arah OX (searah sumbu X)
   $\vec{j}$ = vektor satuan dalam arah OY (searah sumbu Y)
   $\vec{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ (searah sumbu Z)

Contoh 1:

Pada gambar balok disamping, nyatakanlah vektor-vektor berikut ini dalam bentuk persamaan vektor dan vektor kolom.

a. $\overrightarrow{EG}$

b. $\overrightarrow{DB}$

Gambar 3.2

Alternatif penyelesaian:

a. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG}$

$|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{FG}| = 3$

$\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{OA} = -3\vec{i}$, dengan $\vec{i}$ vektor satuan searah sumbu X

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OC} = 4\vec{j}$, dengan $\vec{j}$ vektor satuan searah sumbu Y

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

Jadi persamaan vektor $\overrightarrow{EG} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

Vektor kolom:

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$

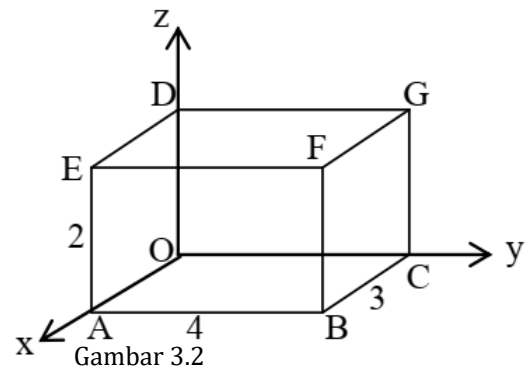
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OC} = 4\vec{j}$

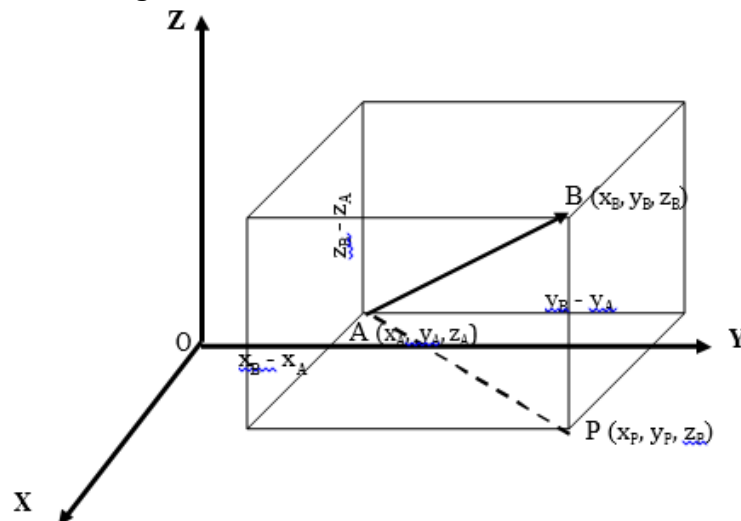
$\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{OD} = -2\vec{k}$, dengan $\vec{k}$ vektor satuan searah sumbu Z

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + (-2\vec{k}) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

Jadi persamaan vektor $\overrightarrow{DB} = 3\vec{i} + 4\overrightarrow{j - 2k}$

Vektor kolom:

$$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Panjang Vektor (Modulus Vektor)

Mari kita perhatikan gambar berikut:

Gambar 3.3 Panjang (Modulus) Vektor

Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ searah sumbu X sebesar $x_B - x_A$, komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang searah sumbu Y sebesar $y_B - y_A$, dan komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang searah sumbu Z sebesar $z_B - z_A$. Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$ dan disebut modulus vektor $\overrightarrow{AB}$. Perhatikan vektor $\overrightarrow{AB}$ merupakan diagonal ruang maka panjang $\overrightarrow{AB}$ adalah:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_{A)}{}^2 + (z_B - z_A)^2}$$

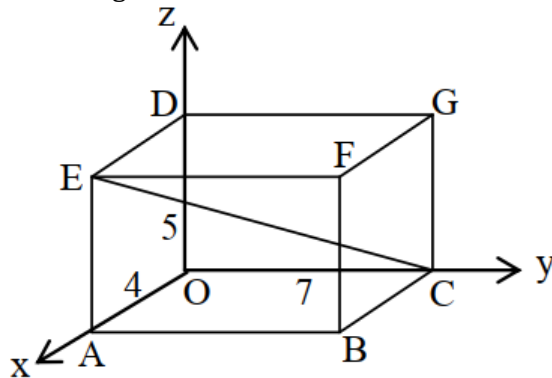
Contoh 2:

Diketahui balok *OABC.DEFG* dimana *O* adalah pusat koordinat Cartesius. Jika panjang sisi OA = 4 cm, OC = 7 cm dan OD = 5 cm. Tentukanlah :

a. Persamaan vektor $\overrightarrow{EC}$

b. Panjang vektor $\overrightarrow{EC}$

Alternatif Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut:

Gambar 3.4 Vektor pada bangun ruang balok.

a. Persamaan vektor $\overrightarrow{EC}$=vektor basis dari vektor $\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}$

$|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{OD}| = 5$ cm, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC}| = 7$ cm, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA}| = 4$ cm

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC} = 5(-\vec{k})$, dengan $\vec{k}$ vektor satuan searah sumbu Z.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG} = 7\vec{j}$, dengan $\vec{j}$ vektor satuan searah sumbu Y

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} = 4(-\vec{i})$, dengan $\vec{i}$ vektor searah sumbu X

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -5\vec{k} + 7\vec{j} - 4\vec{i} = -4\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$

b. Panjang vektor $\overrightarrow{EC}$

$|\overrightarrow{EC}|^2 = |\overrightarrow{EG}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = |\overrightarrow{ED}|^2 + |\overrightarrow{DG}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2$

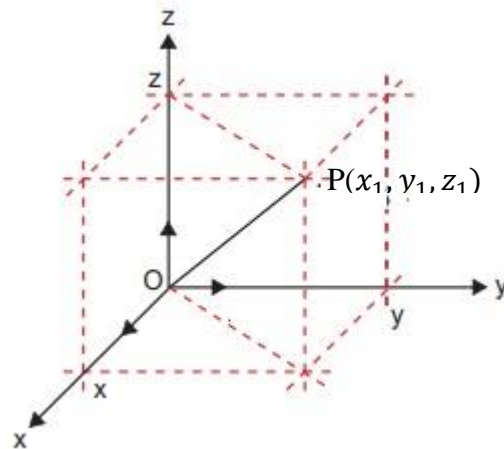
$=(-4)^2 + 7^2 + (-5)^2 = 16 + 49 + 25 = 90$

$|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

Vektor Posisi

Vektor pada bangun ruang dapat digambarkan pada ruang koordinat Cartesius. Setiap titik *P* pada ruang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$, yaitu vektor yang berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik P. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut vektor posisi dari titik *P* pada

ruang koordinat Cartesius. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ tersebut.

Perhatikan gambar berikut:

Gambar 3.5

Pada gambar di atas vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ mempunyai komponen searah sumbu X sebesar x_1, komponen searah sumbu Y sebesar y_1 dan komponen searah sumbu Z sebesar z_1.

Vektor posisi $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dan dalam bentuk vektor basis adalah

$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$.

Contoh 3:

Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(0, 3, 5)$, $B(2, 4, 6)$, dan $C(4, 3, 1)$.

Tentukan:

a. Vektor posisi titik A, B dan C.
b. Vektor $\vec{p}$ yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B
c. Vektor $\vec{q}$ yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C
d. Vektor $\vec{r}$ yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C
e. Keliling segitiga ABC

Alternatif Penyelesaian:

a. Vektor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal O ke titik A.
   Vektor $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal O ke titik B.
   Vektor $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal O ke titik C.
   $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\vec{p} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

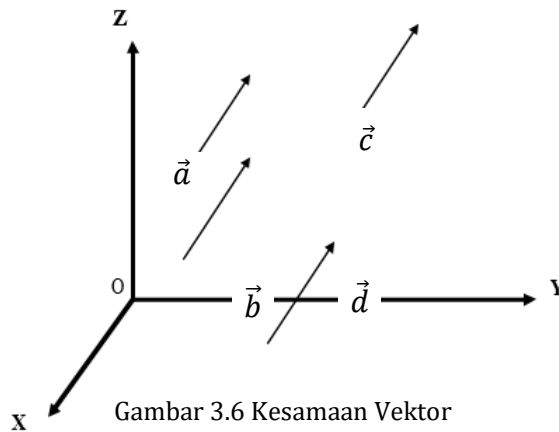
c. $\vec{q} = \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

d. $\vec{r} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

e. Keliling segitiga $ABC = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}|$
   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$
Jadi, keliling segitiga ABC = $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}|$ = $\sqrt{6} + \sqrt{30} + \sqrt{32}$.

Kesamaan Vektor

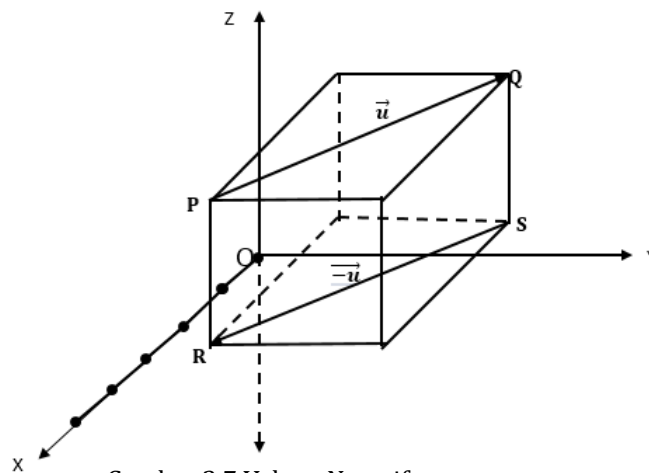
Dua vektor dalam ruang dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar berikut:

Gambar 3.6 Kesamaan Vektor

Vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, dan $\vec{d}$ pada gambar di atas tampak sejajar dan memiliki panjang yang sama. Vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, dan $\vec{d}$ adalah vektor yang sama karena mempunyai besar dan arah yang sama.
Misal:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ atau $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ atau $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{a} = \vec{b}$ jika dan hanya jika $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Vektor Negatif

Vektor di ruang yang besarnya sama dengan vektor $\vec{u}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari $\vec{u}$ dan ditulis sebagai $-\vec{u}$.Perhatikan gambar berikut.

Gambar 3.7 Vektor Negatif

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan vektor $\overrightarrow{SR}$ memiliki panjang yang sama dan arah saling berlawanan. Vektor $\overrightarrow{SR}$ merupakan lawan (negatif) dari vektor $\overrightarrow{PQ}$.

Contoh 4:

Diketahui vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, tentukan negatif dari vektor $\vec{u}$.

Alternatif jawaban:

Negatif dari vektor $\vec{u}$ adalah $-\vec{u}$, maka $-\vec{u} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Vektor Nol

Yang dimaksud dengan vektor nol adalah vektor yang besarnya nol atau tidak mempunyai panjang (berupa titik). Vektor nol tidak mempunyai arah tertentu. Vektor nol dilambangkan dengan $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pada koordinat ruang Cartesius, vektor nol adalah titik $O(0,0,0)$.

Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang 1(satu) satuan disebut vektor satuan. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ didefinisikan vektor $\vec{a}$ dibagi dengan besar vektor $\vec{a}$ sendiri, yang dirumuskan dengan $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Contoh 5:

Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian :

Panjang vektor $\vec{a}$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$

Jadi, vektor satuan vektor $\vec{a}$ adalah $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ dan

Panjang vektor $\vec{e}$ adalah $|\vec{e}| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

C. Rangkuman

- Modulus (panjang) vektor pada bangun ruang adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.
- Modulus vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dinyatakan dengan $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Vektor posisi adalah vektor yang menyatakan kedudukan setiap titik di ruang koordinat Cartesius. Vektor posisi berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik pada ruang koordinat.

- Dua vektor dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama. Vektor yang besarnya sama dengan $\vec{u}$ tetapi arahnya berlawanan dengan $\vec{u}$ dikatakan vektor negative $\vec{u}$.
- Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.
- Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1. Vektor satuan yang searah dengan suatu vektor $\vec{v}$ ditentukan dengan rumus: $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

D. Latihan Soal

1. Tentukan modulus dari vektor-vektor berikut.
   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$
   b. $\overrightarrow{AB}$ dengan titik A (−2 , 3 , −1) dan titik B (2 , 1 , −4)
2. Diketahui titik P (2 , 5 , −4) dan Q (1 , 0 , −3). Tentukan :
   a. Koordinat titik B jika $\overrightarrow{AB}$ sama dengan vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan titik A(2 , −2 , 4)
   b. Koordinat titik S jika $\overrightarrow{RS}$ merupakan negatif vektor $\overrightarrow{PQ}$ jika titik R(−1 , 3 , 2)
3. Tentukan vektor satuan dari vektor-vektor berikut.
   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   b. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   c. $\overrightarrow{CD}$ dengan C(3 , −2 , 1) dan D(2 , −2 , 1)
   d. $\overrightarrow{FG}$ dengan F(2 , 1 , 2) dan G(2 , 0 , 3)
4. Tentukan besar vektor berikut beserta vektor satuannya.
   a. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b. $\vec{w} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$
   c. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
5. Gambarlah vektor dengan titik P (2 , -3 , 1) dan Q (1 , 3 , -2)
   a. Hitung modulus vektor $\overrightarrow{PQ}$
   b. Buat vektor negatif dari $\overrightarrow{PQ}$, kemudian hitung modulusnya/besarnya !

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 3

1. a. Modulus vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

   $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ **(skor 8)**

   b. Diketahui titik A (-2 , 3 , -1) dan titik B(2 , 1 , -4) **(skor 12)**

   Vektor posisi $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Modulus vektor $\overrightarrow{AB} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

2. Diketahui titik P(2 , 5 , -4) dan Q(1 , 0 , -3) titik pangkal dan titik ujung dari vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan A(2, 2, -4) pangkal dari vektor $\overrightarrow{AB}$

   $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Misalkan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ **(skor 2)**

   a. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(skor 10)**

   $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 2 \\ b_2 - 2 \\ b_3 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 2 \\ b_2 - 2 \\ b_3 + 4 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$

   $\begin{pmatrix} b_1 - 2 \\ b_2 - 2 \\ b_3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $b_1 - 2 = -1 \rightarrow b_1 = 1$

   $b_2 - 2 = -5 \rightarrow b_2 = -3$

   $b_3 + 4 = 1 \rightarrow b_3 = -3$

   Jadi, koordinat titik B agar vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ adalah B(1, -3, -3)

   b. Vektor $\overrightarrow{RS}$ merupakan negatif vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan titik R (-1 , 3 , 2) **(skor 8)**

   $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{PQ}$

   Misalkan $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 - (-1) \\ s_{2-}3 \\ s_{3-2} \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} s_1 - (-1) \\ s_2 - 3 \\ s_3 - 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 - (-1) \\ s_2 - 3 \\ s_3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $s_1 - (-1) = 1 \rightarrow s_1 = 0$
   $s_2 - 3 = 5 \rightarrow s_2 = 8$
   $s_3 - 2 = -1 \rightarrow s_3 = 1$
   Jadi, koordinat titik S agar $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{PQ}$ adalah $S(0, 8, 1)$

3. a. Vektor satuan searah vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(skor 5)**

Panjang vektor $\vec{u} = |\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Vektor satuan searah vektor $\vec{u} = \vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. Vektor satuan searah vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(skor 5)**

Panjang vektor $\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

Vektor satuan searah vektor $\vec{v} = \vec{e} = \frac{v}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Pembilang dan
penyebut dikalikan
$\sqrt{3}$

c. $\overrightarrow{CD}$ dengan $C(3\,,-2\,,1)$ dan $D(2\,,-2\,,1)$ **(skor 5)**

$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Panjag $\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

Vektor satuan searah vektor $\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d. $\overrightarrow{FG}$ dengan $F\,(2\,,1\,,2)$ dan $G\,(2\,,0\,,3)$ **(skor 5)**

Pembilang dan
penyebut dikalikan
$\sqrt{2}$

$\overrightarrow{FG} = \vec{g} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{FG}\,| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$

Vektor satuan searah vektor $\overrightarrow{FG} = \frac{\overrightarrow{FG}}{|\overrightarrow{FG}\,|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. *a.* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(skor 8)**

Panjang vektor $\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$

Vektor satuan searah vektor $\vec{v} = \vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}2\sqrt{21}\\4\sqrt{21}\\\sqrt{21}\end{pmatrix}$

b. $\vec{w} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}$ **(skor 8)**

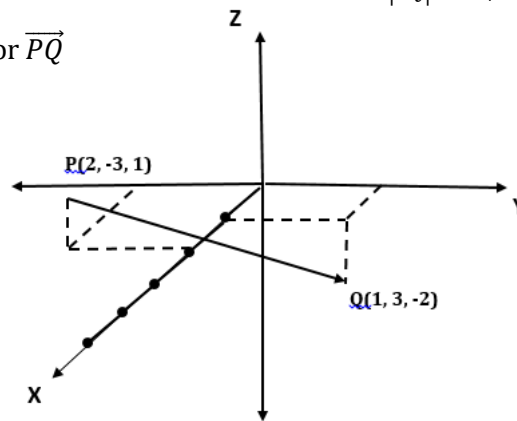
Panjang $\vec{w} = |\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Vektor satuan searah vektor $\vec{w} = \vec{e} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{-\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}(-\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$

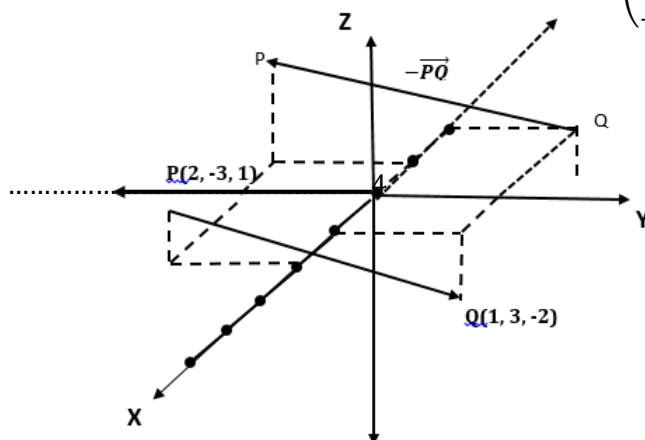
c. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$ **(skor 8)**

Panjang $\overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

Vektor satuan searah vektor $\overrightarrow{PQ} = \vec{e} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}}{2\sqrt{11}} = \frac{1}{22}\sqrt{11}\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$

5. Gambar vektor $\overrightarrow{PQ}$ **(skor 6)**

a. $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\6\\-3\end{pmatrix}$ **(skor 4)**

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 +) - 3)^2} = \sqrt{1 + 36 + 9} = \sqrt{46}$

b. Vektor negatif dari $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{PQ} = -\begin{pmatrix}-1\\6\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-6\\3\end{pmatrix}$ **(skor 6)**

Modulus Vektor $-\overrightarrow{PQ} = |-\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 36 + 9} = \sqrt{46}$

Skor maksimum : 100

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar Anda, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan Anda cukup atau kurang, maka Anda harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah dapat menghitung modulus Vektor pada bangun ruang		
2.	Saya sudah dapat menentukan vektor posisi pada bangun ruang.		
3.	Saya sudah dapat memahami kesamaan vektor pada bangun ruang.		
4.	Saya sudah dapat menentukan negative suatu vektor pada bangun ruang		
5	Saya sudah memahami vektor nol pada bangun ruang		
6	Saya sudah dapat memahami vektor satuan pada bangun ruang		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
Operasi Vektor Pada Bangun Ruang

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 4 ini diharapkan Anda dapat:
1. Menentukan hasil kali suatu vektor pada bangun ruang dengan skalar.
2. Menentukan hasil penjumlahan vektor-vektor pada bangun ruang.
3. Menentukan selisih dua vektor pada bangun ruang.
4. Menentukan perbandingan vektor.
5. Menentukan perkalian skalar dua vektor pada bangun ruang bila diketahui komponen-komponennya.
6. Menentukak proyeksi ortogonal suatu vektor pada vektor Lain.

B. Uraian Materi

Hasil Kali Vektor dengan Skalar pada Bangun Ruang

Seperti telah Anda pelajari pada kegiatan pembelajaran 2, hasil kali vektor dengan skalar sekarang kita kembangkan pada bangun ruang. Anda akan menggunakan pemahaman Anda tentang vektor dan skalar di kegiatan belajar ini. Vektor dapat dioperasikan dengan skalar. Karena skalar merupakan bilangan, maka perkalian vektor dengan skalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja sedangkan arah vektor tetap.

Hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\vec{u}$ dan arahnya sama dengan $\vec{u}$ bila n positif dan berlawanan arah $\vec{u}$ bila n negatif.

Jadi, hasil kali vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ dengan skalar n adalah $n.\vec{u}=n.\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n.u_1\\n.u_2\\n.u_3\end{pmatrix}$

Contoh 1:

Jika $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, maka $4.\vec{a}=4.\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.2\\4.3\\4.(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\\-4\end{pmatrix}$

Jika $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-7\vec{k}$, maka $3.\vec{v}=3(3\vec{i}-2\vec{j}-7\vec{k})=9\vec{i}-6\vec{j}-21\vec{k}$

Penjumlahan Vektor pada Bangun Ruang

Pada dasarnya penjumlahan vektor pada bangun ruang sama dengan penjumlahan vektor pada bidang datar, menggunakan aturan segitiga atau aturan jajargenjang. Hanya saja komponen vektor yang ditambahkan menjadi lebih banyak satu komponen.

Secara umum jika dua vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor tidak nol, maka :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, maka :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1)\vec{i} + (a_2+b_2)\vec{j} + (a_3+b_3)\vec{k}$$

Contoh 2:

Hitunglah jumlah dari dua buah vektor berikut.

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Alternatif Penyelesaian :

a. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ -3+4 \\ 5+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} + \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (1+5)\vec{j} + (-4+1)\vec{k}$

$= 5\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$

Contoh 3:

Seorang pendaki gunung memulai pendakian gunung dari kaki gunung yang dapat dinyatakan sebagai posisi/koordinat $O(0,0,0)$. Dari titik O pendaki gunung tersebut menuju lokasi P yang berkedudukan 5 km ke arah timur, 4 km ke arah utara dan 3 km ke atas. Dari lokasi P dia melanjutkan perjalanan ke lokasi Q yang berkedudukan 4 km ke arah timur, 1 km ke arah selatan dan 3 km ke atas. Di manakah kedudukan pendaki gunung tersebut apabila di lihat dari posisi mula-mula (lokasi $O(0,0,0)$)?

Alternatif penyelesaian:

Dari lokasi mula-mula ke lokasi P dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$.

Lokasi titik P adalah 5 km ke arah timur, 4 km ke arah utara dan 3 km ke atas dan dinyatakan dalam bentuk vektor kolom: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dari lokasi P ke lokasi Q dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Kedudukan pendaki gunung dilihat dari lokasi mula-mula adalah :

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini berarti bahwa pendaki gunung tersebut terletak 9 km ke arah timur, 3 km ke arah utara, dan pada ketinggian 6 km dari kedudukan mula-mula.

Selisih Dua Vektor pada Bangun Ruang

Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Selisih dua vektor pada koordinat ruang Cartesius pada dasarnya sama dengan selisih vektor dua vektor pada koordinat bidang Cartesius, hanya saja komponen vektornya ada tiga.

Secara umum selisih dua vektor jika dua vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

maka : $\vec{a} - \vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,
maka : $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$

Contoh 4:
Hitunglah selisih dari dua vektor berikut :

a . $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Alternatif Penyelesaian :

a. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 6-1 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

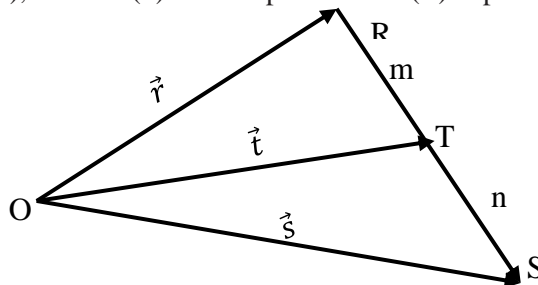
b. $\vec{a} - \vec{b} = (8\text{-}3)\vec{i} + (6\text{-}5)\vec{j} + (9\text{-}2)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

Perbandingan Vektor

Alif pergi dari rumahnya menuju sekolah dengan berjalan kaki melalui jalan lurus. Setelah berjalan *m* meter Alif beristirahat sejenak dan untuk sampai ke sekolah dia harus melanjutkan *n* meter lagi. Perbandingan jarak yang telah ditempuh oleh Alif dengan jarak yang belum ditempuhnya adalah *m* : *n.*

Anda perhatikan gambar berikut.

Misalkan posisi rumah Alif adalah *R*, posisi sekolah adalah *S*, Posisi Alif istirahat *T***.** Posisi rumah (*R*), sekolah (*S*) dan tempat istirahat (T) dapat dinyatakan sebagai vektor posisi.

Gambar 4.1 perbandingan vektor

Dari gambar diketahui $\overrightarrow{RT} : \overrightarrow{TS} = m : n$

$$\frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{TS}} = \frac{m}{n} \leftrightarrow n.\overrightarrow{RT} = m.\overrightarrow{TS}$$
$$n(\vec{t} - \vec{r}) = m(\vec{s} - \vec{t})$$
$$n.\vec{t} - n.\vec{r} = m.\vec{s} - m.\vec{t}$$
$$n.\vec{t} + m.\vec{t} = m.\vec{s} + n.\vec{r}$$
$$\vec{t}(n + m) = m.\vec{s} + n.\vec{r}$$
$$\vec{t} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{n + m} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{m + n}$$

Jadi,
$$\boxed{\vec{t} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{m + n}}$$

Jika $R(x_1, y_1)$ dan $S(x_2, y_2)$ di R^2, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s}+n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\binom{x_2}{y_2}+n.\binom{x_1}{y_1}}{m+n}$

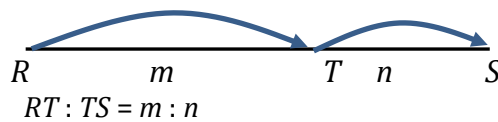
Koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n})$

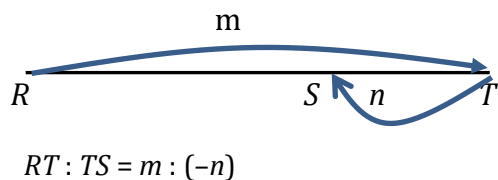
Jika $R(x_1, y_1, z_1)$ dan $S(x_2, y_2, z_2)$ di R^3, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s}+n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}+n.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}}{m+n}$

Koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n})$

Dalam perbandingan $\overrightarrow{RT} : \overrightarrow{TS} = m : n$, terdapat dua kasus, yaitu:

1. Titik T membagi RS di dalam.

$RT : TS = m : n$

2. Titik T membagi RS di luar.

$RT : TS = m : (-n)$

Contoh 5:

Diketaui rua garis $\overline{AB}$ dengan $A(2, 3, 4)$ dan $B(6, 7, 8)$. Titik T terletak pada $\overline{AB}$ dengan perbandingan 1 : 3. Tentukan koordian titik T jika:

a. T membagi $\overline{AB}$ di dalam
b. T membagi $\overline{AB}$ di luar.

Alternatif Penyelesaian:

a. Titik T membagi $\overline{AB}$ di dalam dengan perbandingan 1 : 3, berlaku $\overline{AT} : \overline{TB} = 1 : 3$.

Koordinat titik T dapat Anda tentukan dengan cara berikut.

$T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}) \rightarrow T(\frac{1.6+3.2}{1+3}, \frac{1.7+3.3}{1+3}, \frac{1.8+3.4}{1+3}) = \left(\frac{12}{4}, \frac{16}{4}, \frac{20}{4}\right) = (3, 4, 5)$

Jadi, koordinat titik T jika membagi dari dalam adalah $T(3, 4, 5)$

b. Titik T membagi $\overline{AB}$ di dalam dengan perbandingan 1 : 3, berlaku $\overline{AT} : \overline{TB} = 1 : (-3)$

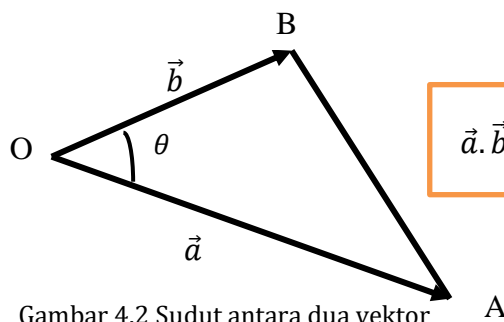
Koordinat titik T dapat Anda tentukan dengan cara berikut.

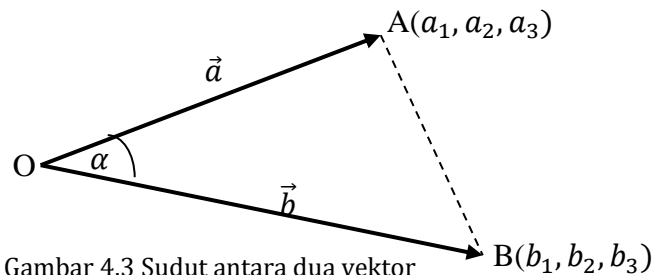
$T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n})$

$\rightarrow T(\frac{1.6+(-3).2}{1+(-3)}, \frac{1.7+(-3).3}{1+(-3)}, \frac{1.8+(-3).4}{1+(-3)}) = \left(\frac{0}{-2}, \frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-2}\right) = (0, 1, 2)$

Jadi, koordinat titik T jika membagi dari dalam adalah $T(0, 1, 2)$.

Perkalian Skalar Dua Vektor

Dua vektor bukan nol pada bangun ruang dapat dikalikan dan hasilnya merupakan scalar atau Perkalian vektor dengan vektor yang menghasilkan skalar.. Hal ini sering disebut sebagai *dot product* (hasil kali titik) dari dua vektor dan dinyatakan $\vec{a}.\vec{b}$ didefinisikan sebagai $|\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\theta$ dengan θ sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ seperti gambar berikut:

Gambar 4.2 Sudut antara dua vektor

Coba Anda perhatikan vektor berikut.

Gambar 4.3 Sudut antara dua vektor

Dengan menggunakan aturan cosinus yang sudah Anda pelajari pada Matematika Umum, kita dapatkan:

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2.|\overrightarrow{OA}||OB|\cos\alpha$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2.|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \quad (1)$

Berdasarkan rumus panjang vektor:

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

$= (b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2) + (b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2) + (b_3^2 - 2b_3a_3 + a_3^2)$

$= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + ((a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 2b_1a_1 - 2b_2a_2 - 2b_3a_3$

$= |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3) \quad (2)$

Dari persamaan (1) dan (2) kita dapatkan:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2.|\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3)$$

$$-2.|\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha = -2(b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3)$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$

$$\vec{a}.\vec{b} = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Kedua ruas dikurang $|\vec{a}|^2$dan $|\vec{b}|^2$
Kedua ruas dibagi (-2)

Jadi,

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Contoh 6:

Diketahui $|\vec{a}|$ = 6 dan $|\vec{b}|$ = 5 dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah 60° tentukan nilai $\vec{a}.\vec{b}$!

Alternatif Penyelesaian:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$

$= 6 . 5 . \cos 60°$

$= 30 . \frac{1}{2}$

$= 15$

Contoh 7:

Diketahui vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ dan $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, tentukan Perkalian skalar vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

Alternatif penyelesaian:

$\vec{a} . \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

$= 2.1 + 3.2 + 6.2$

$= 2 + 6 + 12$

$= 20$

Contoh 8:

Diketahui $|\vec{a}|$ = 8 dan $|\vec{b}|$ = 4 dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah 90° tentukan nilai $\vec{a}.\vec{b}$!

Alternatif Penyelesaian:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$

$= 8 . 4 . \cos 90°$

$= 32 .0$

$= 0$

Pada contoh soal 8 sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 90^0, berarti vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling tega lurus. Dengan demikian, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Dua buah vektor tegak lurus apabila hasil *dot product* kedua vektor bernilai nol.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 90^0 = |\vec{a}|.|\vec{b}|. 0 = 0$$

Jadi, jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ saling tegak lurus, maka:

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$$

Rumus ini berlaku juga untuk vektor pada bidang R^2

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|cos\theta$

$\vec{a} . \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$

1. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ diketahui sama dengan θ dan $0^0 \leq \theta \leq 180^0$, maka: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|cos\theta$
2. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ tidak diketahui, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
3. Sifat-sifat perkalian vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\vec{c}$ berlaku:
   - $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
   - $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
   - $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$
   - Jika $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, dan $\vec{a}.\vec{b} = 0$, maka $\vec{a} \perp \vec{b}$

Anda sudah paham Perkalian scalar dua vektor? Sekarang pemahaman akan kita perluas dengan mempelajari sudut antara dua vektor. Jika dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bertemu pada satu titik, maka sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut yang dibentuk oleh kaki vektor $\vec{a}$ dan kaki vektor $\vec{b}$. Sudut yang diambil adalah sudut terkecil.

Coba Anda perhatika rumus Perkalian scalar dua vektor berikut:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Dari rumus di atas Anda dapat mencari sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Contoh 9:

Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$!

Alernatif penyelesaian:

Misalkan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah α.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1.(-1) + (-1).2 + 0.2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2}.\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}.\sqrt{9}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Diperoleh $\alpha = 135^0$

Jadi, sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 135^0.

Contoh 10:

Diketahui vektor $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, tentukan sudut antar vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah α.

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{2.1 + (-1).1 + 1.2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^0$$

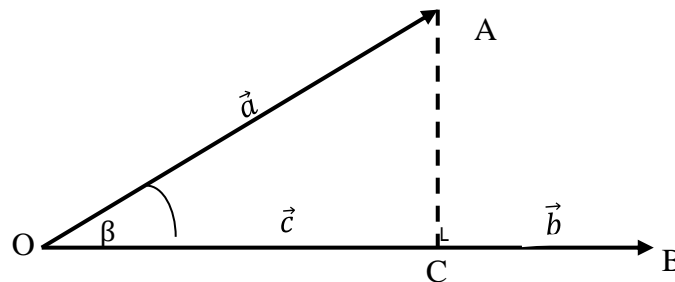
Jadi, sudut antara vektor $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ adalah $\alpha = 60^0$

Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor pada Vektor Lain

Selain menentukan besar sudut antara dua vektor, salah satu kegunaan dari Perkalian skalar dua vektor adalah untuk menentukan proyeksi ortogonal dari suatu vektor pada vektor lain.

a. **Proyeksi Skalar Ortogonal**

Proyeksi skalar ortogonal biasanya disingkat dengan proyeksi skalar saja atau sering dikatakan dengan panjang proyeksi vektor. Misalkan proyeksi $\overrightarrow{OA}$ pada $\overrightarrow{OB}$ adalah $\overrightarrow{OC}$.

Perhatikan gambar berikut.

Gambar 4.4 Proyeksi scalar ortogonal

$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}|$ disebut proyeksi skalar orthogonal (panjang proyeksi) $\vec{a}$ pada $\vec{b}$.

Perhatikan segitiga AOB.

$$\text{Cos } \beta = \frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|}$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}| \cos \beta$$

$$= |\vec{a}| \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Jadi, proyeksi skalar orthogonal (panjang proyeksi) vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah:

$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

b. **Proyeksi Vektor ortogonal**

Coba Anda perhatikan kembali Gambar 4.4 di atas. Vektor $\vec{c}$ searah vektor $\vec{b}$, ini berarti vektor satuan $\vec{c}$ sama dengan vektor satuan $\vec{b}$, yaitu $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ sehingga:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} . \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} . \vec{b}$$

Jadi, proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah: $\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} . \vec{b}$

Contoh 11:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukanlah:

a. Panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$

b. Vektor proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan vektor proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah vektor $\vec{c}$

a. $|\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1.(-1)+(-1).2+0.2}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \left|\frac{-3}{\sqrt{9}}\right| = \left|\frac{-3}{3}\right| = |-1| = 1$

b. $\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} . \vec{b} = \frac{1.(-1)+(-1).2+0.2}{(\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2})^2} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-3}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Jadi, vektor proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

C. Rangkuman

- Hasil kali vektor $\overrightarrow{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\overrightarrow{u}$ dan arah sama dengan $\overrightarrow{u}$.
- Penjumlahan dua vektor pada bangun ruang prinsipnya sama dengan penjumlahan dua vektor pada bidang datar.
- Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Pada koordinat ruang Cartesius jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka:
  - $n.\vec{a} = n.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.a_1 \\ n.a_2 \\ n.a_3 \end{pmatrix}$ dan $n.\vec{b} = n.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.b_1 \\ n.b_2 \\ n.b_3 \end{pmatrix}$
  - $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
  - $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$
- Jika titik T membagi $\overline{RS}$ di dalam, maka berlaku: $\overline{RT} : \overline{TS} = m : n$
- Jika titik T membagi $\overline{RS}$ di luar, maka berlaku: $\overline{RT} : \overline{TS} = m : (-n)$
- Jika $R(x_1, y_1)$ dan $S(x_2, y_2)$ di R^2, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{m+n}$, dan koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2 + nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2 + ny_1}{m+n})$
- Jika $R(x_1, y_1, z_1)$ dan $S(x_2, y_2, z_2)$ di R^3, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}{m+n}$, dan koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2 + nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n})$
- Perkalian scalar antara dua vektor adalah Perkalian vektor dengan vektor yang menghasilkan scalar
- Rumus Perkalian scalar dua vektor berikut:
  $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$
  $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut yang dibentuk oleh kaki vektor $\vec{a}$ dan kaki vektor $\vec{b}$

Rumus sudut antara vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$ adalah:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

- Proyeksi orthogonal (panjang proyeksi) vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah:
- $|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$
- Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah: $\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}.\vec{b}$

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$
   b. $2\vec{a} + 2\vec{c}$
   c. $5\vec{a} - 3\vec{c}$
2. Diketahui $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a} + \vec{b}$
   b. $\vec{a} - \vec{b}$
   c. $-3\vec{a} + 2\vec{b}$
3. Hitunglah $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jika diketahui $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ dan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah $60°$!
4. Diketahui vektor $\vec{a}$ = i – 2j + 3k dan $\vec{b}$ = 3i + j + 2k. Tentukanlah :
   a. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
   b. besar sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$
5. Diketahui vektor $\vec{a}$ = 2i – 3j +mk dan $\vec{b}$ = 6i + 2j – 4k. Tentukan nilai m jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.
6. Diketahui segitiga PQR dengan $P(5, 1, 5)$, $Q(1, 4, 5)$, dan $R(3, 2, 1)$. Tentukanlah:
   a. panjang PR
   b. panjang PQ
   c. panjang proyeksi PR pada PQ
   d. proyeksi vektor PR pada PQ
7. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Tentukan nilai m agar vektor $(\vec{a} + m\vec{b})$ tegak lurus pada vektor $\vec{a}$
8. Tentukanlah koordinat titik P yang terletak pada ruas garis $\overline{AB}$ jika:
   a. $A(2, 0, 1)$, $B(10, 4, 5)$, dan $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$
   b. $A(1, 1, 1)$, $B(3, -2, 5)$, dan $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : -2$

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 4

1. Diketahui vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$ dan $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$. **(skor 15)**
   a. $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-14\\10\end{pmatrix}$
   b. $2\vec{a}+2\vec{c}=2.\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-10\\6\end{pmatrix}$
   c. $5\vec{a}-3\vec{c}=5.\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$
2. Diketahui $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ dan $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$. **(skor 15)**
   a. $\vec{a}+\vec{b}=(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})=(3\vec{i}+\vec{i})+((-2\vec{j}+3\vec{j})+(\vec{k}+(-2\vec{k})$
   $=4\vec{i}+\vec{j}+(-\vec{k})=4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$
   b. $\vec{a}-\vec{b}=(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})-(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$
   $=(3\vec{i}-\vec{i})+((-2\vec{j}-3\vec{j})+(\vec{k}-(-2\vec{k})$
   $=2\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$
   c. $-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})+2(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$
   $=(-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k})+(2\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k})$
   $=-\vec{i}+12\vec{j}-7\vec{k}$
3. Diketahui $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ dan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 60° ! **(skor 5)**
   $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 60^0$
   $\vec{a}.\vec{b}=3.4.\frac{1}{2}=6$
4. Diketahui vektor $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ dan $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ **(skor 10)**
   a. $\vec{a}.\vec{b}=1.3+(-2).1+3.2=3-2+6=7$
   b. Sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah β.
   Cos β = $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{1.3+(-2).1+3.2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$
   $\beta=60^0$
   Jadi, sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah $\beta=60^0$
5. Diketahui vektor $\vec{a}$ = 2**i** – 3**j** +m**k** dan $\vec{b}$ = 6**i** + 2**j** – 4**k** **(skor 10)**
   $\vec{a}.\vec{b}$ = 10
   $\vec{a}.\vec{b}$ = 2.6 + (-3).2 + m.(–4) = 10
   12 – 6 – 4m = 10 ↔ 6 – 4m = 10
   –4m = 4
   m = –1
6. Diketahui segitiga PQR dengan $P(5, 1, 5)$, $Q(1, 4, 5)$, dan $R(3, 2, 1)$.
   $\vec{p}$, $\vec{q}$, dan $\vec{r}$ merupakan vektor posisi dari titik P, Q dan R.

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(skor 20)**

a. panjang $\overrightarrow{PR} = |\overrightarrow{PR}|$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

b. panjang $\overrightarrow{PQ}$ $|\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 9 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

c. Misalkan vektor proyeksi $\overrightarrow{PR}$ pada $\overrightarrow{PQ}$ adalah $\vec{c}$

$$|\vec{c}| = \frac{\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(-2).(-4)+1.3+(-4).(0)}{5} = \frac{8+3+0}{5} = \frac{11}{5} = \frac{11}{5}$$

d. vektor proyeksi $\overrightarrow{PR}$ pada $\overrightarrow{PQ}$

$$\vec{c} = \frac{\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{11}{5} \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{5} = \frac{11}{25} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{44}{25} \\ \frac{33}{25} \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$. **(skor 15)**

Vektor $(\vec{a} + m\vec{b})$ tegak lurus pada vektor $\vec{a}$

$$\vec{a} + m\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4m \\ -1 + 10m \\ 2 + 8m \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} + m\vec{b}).\vec{a} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 4m \\ -1 + 10m \\ 2 + 8m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 + 4m).2 + (-1 + 10m)(-1) + (2 + 8m).2 = 0$$

$4+8m + 1 - 10m + 4 + 16m = 0$

$14m + 9 = 0$

$14m = -9$

$m = -\frac{9}{14}$

8. a. $A(2, 0, 1)$, $B(10, 4, 5)$, dan $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$ **(skor 10)**

$$P\left(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$P\left(\frac{3.10+1.2}{3+1}, \frac{3.4+1.0}{3+1}, \frac{3.5+1.1}{3+1}\right) = \left(\frac{42}{4}, \frac{12}{4}, \frac{16}{4}\right) = (13, 3, 4)$$

Jadi, koordinat titik P $(13, 3, 4)$

b. $A(1, 1, 1)$, $B(3, -2, 5)$, dan $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : -2$

$$P\left(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$P\left(\frac{3.3+(-2).1}{3+(-2)}, \frac{3.(-2)+(-2).1}{3+(-2)}, \frac{3.5+(-2).1}{3+(-2)}\right) = \left(\frac{7}{1}, \frac{-8}{1}, \frac{13}{1}\right) = (7, -8, 13)$$

Jadi, koordinat titik P $(7, -8, 13)$

Skor maksimum : 100

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar Kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan Kalian cukup atau kurang, maka Kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami Perkalian scalar dengan Vektor pada R^3.		
2.	Saya sudah dapat memahami penjumlahan vektor pada R^3.		
3.	Saya sudah dapat memahami selisih dua vektor pada R^3.		
4.	Saya sudah memahami perbandingan vektor		
5.	Saya sudah dapat memahami Perkalian scalar dua vektor.		
6.	Saya sudah bisa memahami sudut antara dua vektor,		
7.	Saya sudah memahami proyeksi orthogonal dua vektor		
8.	Saya sudah dapat menentukan vektor proyeksi orthogonal dua vektor		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah ....

   A. $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

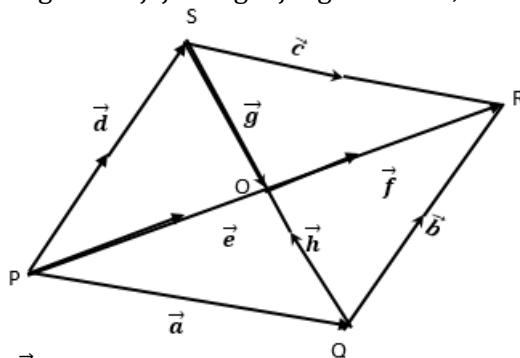
   D. $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   E. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Pada kubus ABCD.EFGH manakah diantara vektor berikut ini yang sama dengan $\overrightarrow{HF}$

   A. $\overrightarrow{BD}$
   B. $\overrightarrow{DC}$
   C. $\overrightarrow{DB}$
   D. $\overrightarrow{DF}$
   E. $\overrightarrow{EF}$

3. Pada gambar jajaran genjang di bawah, hasil dari $\vec{h} - \vec{g} + \vec{c}$ adalah....

   A. $\vec{b}$
   B. $\vec{a}$
   C. $\vec{d}$
   D. $\vec{e}$
   E. $\vec{f}$

4. Pada persegi panjang $OACB$, D adalah titik tengah OA dan P adalah titik potong CD dengan diagonal AB. Jika $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ dan $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, maka $\overrightarrow{CP}$ = ...

   A. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

   B. $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

   C. $-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

   D. $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

   E. $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

5. Diketahui vektor $\vec{a}$ = 5i – 3j + 2k, maka panjang vektor $\vec{a}$ adalah ….
   A. 3
   B. 4
   C. $\sqrt{20}$
   D. 5
   E. $\sqrt{38}$
6. Jika A = (5 , -3 , 2) dan B = (1 , 5 , -2) maka komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah ….
   A. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$
7. Jika diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $2\vec{a} + 3\vec{b}$ adalah ….
   A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
8. Jika diketahui vektor $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ dan $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$, maka panjang vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$ = ...
   A. $5\sqrt{5}$
   B. $\sqrt{11}$
   C. $2\sqrt{11}$
   D. $\sqrt{29}$
   E. $\sqrt{109}$

9. Pada segitiga ABC, diketahui A(-2, 2, -5), B (3, -8, 5) dan C(-1, -3, 0). Titik Q pada $\overline{AB}$ sehingga $\overline{AQ}$: $\overline{QB}$ = 3 : 2. Komponen vektor $\overrightarrow{CQ}$ adalah ....
   A. $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
10. Diketahui segitiga ABC dengan $A(1, 4, 6)$, $B(1, 0,2)$, dan $C(2, -1, 5)$. Titik P terletak pada perpanjangan AB sehingga AP : BP = 3 : 1. Panjang vektor yang diwakili oleh $\overrightarrow{PC}$ adalah..
   A. $3\sqrt{3}$
   B. $\sqrt{13}$
   C. 3
   D. $\sqrt{35}$
   E. $\sqrt{43}$
11. Diketahui $\vec{a}$ = 2i – 3j + 4k dan $\vec{b}$ = i + 2j – 3k, maka $\vec{a}$. $\vec{b}$ adalah ….
   A. –18
   B. –16
   C. –12
   D. 10
   E. 18
12. Apabila diketahui $|\vec{a}|$ = 2 dan $|\vec{b}|$ = 6 serta sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 60 ° maka $\vec{a}$. $\vec{b}$ = ….
   A. –6
   B. 6
   C. 12
   D. 14
   E. 16
13. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka $\vec{a}.\vec{b}$ = ….
   A. –6
   B. 6
   C. 8
   D. 10
   E. 12

14. Diketahui koordinat $A(6, \text{-}2, \text{-}6)$, $B(3, 4, 6)$ dan $C(9, x, y)$. Jika titik-titik A, B dan C kolinear (segaris), maka nilai $x - y$ sama dengan ....
    A. -18
    B. 4
    C. 6
    D. 10
    E. 18
15. Diketahui vektor $\vec{a}$ = $2i$ - $3j$ + $5k$ dan vektor $\vec{b}$ = -$3i$ - $5j$ + $2k$. Jika θ adalah sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, maka nilai tan θ adalah ....
    A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    B. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    D. $\sqrt{3}$
    E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
16. Diketahui koordina titik O(0, 0), A(1, 2) dan B(4, 2). α merupakan sudut antara vektor $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$. tan α =....
    A. $\frac{4}{3}$
    B. $\frac{3}{4}$
    C. $\frac{3}{5}$
    D. $\frac{9}{16}$
    E. $\frac{6}{13}$
17. Diketahui vektor $\vec{a} = 6x\vec{i} + 2x\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k}$, dan $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. Jika vektor $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$, maka vektor $\vec{a} - \vec{c} = \ldots.$
    A. $-58\vec{i} - 20\vec{j} - 3\vec{k}$
    B. $-58\vec{i} - 23\vec{j} - 3\vec{k}$
    C. $-62\vec{i} - 20\vec{j} - 3\vec{k}$
    D. $-62\vec{i} - 23\vec{j} - 3\vec{k}$
    E. $-62\vec{i} - 23\vec{j} - 3\vec{k}$
18. Vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ vektor membentuk sudut α. Diketahui $|\bar{a}|$ = 6, $|\bar{b}|$ = 15, dan cos α = 0,7; maka nilai $\bar{a} \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \ldots.$
    A. 49
    B. 89
    C. 99
    D. 109
    E. 115

19. Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ p \\ -3 \end{pmatrix}$. Jika kosinus sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah $\frac{1}{3}$, nilai p adalah....
    A. 4 atau 24
    B. –4 atau –24
    C. 2 atau 14
    D. –4 atau –12
    E. –4 atau 14
20. Diketahui $|a|$, $|b|$, dan $|a - b|$ berturut-turut adalah 4, 6 dan $2\sqrt{19}$. Nilai $|a + b|$ = ...
    A. $4\sqrt{19}$
    B. $\sqrt{19}$
    C. $4\sqrt{7}$
    D. $2\sqrt{7}$
    E. $\frac{1}{2}\sqrt{7}$
21. Diketahui $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{9}$, dan $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$ Besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah
    A. 45°
    B. 60°
    C. 120°
    D. 135°
    E. 150°
22. Diketahui vektor $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, dan $\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Panjang proyeksi vektor $(\vec{a} + \vec{b})$ pada $\vec{c}$ adalah….
    A. $3\sqrt{2}$
    B. $4\sqrt{2}$
    C. $5\sqrt{2}$
    D. $6\sqrt{2}$
    E. $7\sqrt{2}$
23. Vektor $\vec{c}$ adalah proyeksi $\overrightarrow{a}$ dan $\overrightarrow{b}$. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, maka $\vec{c}$ = ...
    A. $\frac{1}{5}(3 \;\; 4)$
    B. $\frac{2}{5}(3 \;\; 4)$
    C. $\frac{4}{5}(3 \;\; 4)$
    D. $\frac{2}{25}(3 \;\; 4)$
    E. $\frac{1}{25}(3 \;\; 4)$

24. Diketahui panjang vektor proyeksi $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ pada vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah 8. Nilai dari p =….
    A. –4
    B. –3
    C. 3
    D. 4
    E. 6
25. Ditentukan koordinat titik-titik $A(-2,6,5)$; $B(2,6,9)$; $C(5,5,7)$. AP : PB = 3 : 1 dan titik P terletak pada AB. Panjang proyeksi $\overrightarrow{PC}$ pada $\overrightarrow{AB}$ adalah….
    A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
    B. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
    C. $2\sqrt{2}$
    D. $3\sqrt{2}$
    E. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. D
2. C
3. A
4. C
5. E
6. D
7. A
8. A
9. E
10. A
11. B
12. B
13. B
14. D
15. D
16. B
17. B
18. C
19. A
20. D
21. D
22. B
23. C
24. C
25. A

DAFTAR PUSTAKA

Anwar, Cecep. 2008. *Matematika Aplikasi Jilid 3*. Pusat Perbukuan Depatemen Pendidikan Nasional: Jakarta.

Edwin J. Purcell, Dale Varberg, 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis* (terjemahan I Nyoman Susila dkk). Erlangga: Jakarta.

Leonard I. Holder, James DeFranza, Jay M. Pasachoff, 1988. *Multivariabel Calculus,* Brooks/Cole Pub. Co.: California.

Noormandiri, B.K. dan Endar Sucipto. 1994. *Matematika SMU untuk kelas 3 Program IPA*, Penerbit Erlangga: Jakarta

Raharjo, Marsudi. 2009. *Vektor*. PPPPTK Matematika: Yogyakarta.

Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Untuk SMA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam*. Penerbit : Erlangga, Jakarta.